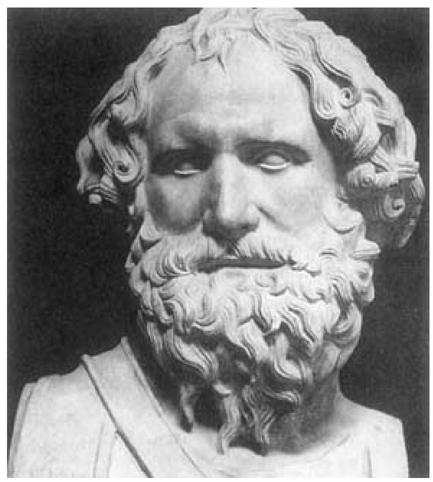
Flotamiento de esferas

M. C. José Antonio Medina Hernández
Departamento de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma de Aguascalientes

Arquímides fue un científico griego nacido el año 287 a.C. en Siracusa (Sicilia), asesinado en el mismo lugar en el año 212 a.C. por un soldado romano. Sobre su muerte se narra que al entrar el ejército enemigo a la ciudad donde Arquímides residía, lo encontraron concentrado en un problema geométrico. Al pisar uno de los soldados una figura dibujada en el piso, Arquímides le indicó que no la destruyera. Esta actitud irritó y/o atemorizó al soldado, que le clavó su espada, causando la muerte a uno de los más grandes genios que ha dado la humanidad.



ARQUIMIDES 287-212 a.C.

Arquímides formuló muchos teoremas geométricos, aportando ideas básicas para el cálculo de áreas, que posteriormente fueron formalizadas a través de lo que ahora conocemos como cálculo integral. Fue autor de muchos inventos útiles, como el tornillo o bomba de Arquímides, que se utiliza para subir el agua de lugares bajos a partes más altas. También descubrió el principio de la palanca. Se narra que algunos de sus inventos se utilizaron para defender su ciudad contra los soldados enemigos, sorprendiéndolos con sus novedosas armas, como los espejos concentradores de luz solar, que eran dirigidos contra los barcos enemigos para quemarlos y cegar a los tripulantes.

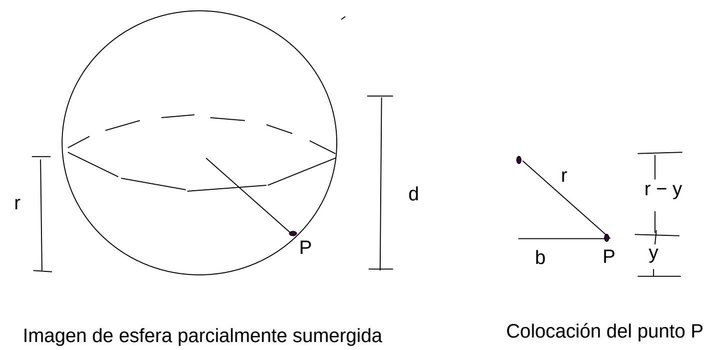


Figura 1: Planteamiento

Otro de sus descubrimientos en Física es el llamado principio de Arquímides, que establece:

"Al sumergirse un cuerpo en un recipiente lleno de un líquido, dicho cuerpo recibirá un empuje hacia arriba igual al peso del líquido que desaloja dicho cuerpo del recipiente."

Utilizando este principio físico, así como el teorema de Pitágoras, el cálculo integral y las técnicas de análisis numérico, se puede resolver el siguiente problema:

PROBLEMA: Suponga que al introducir una esfera de radio r en un líquido, queda parcialmente sumergida. Encuentre la distancia a la que la esfera queda sumergida si su densidad de masa es ρ.

SOLUCION. A fin de aclarar las ideas involucradas considere la Figura 1.

La esfera tiene radio r y la cantidad d representa la distancia a la que se encuentra sumergida la esfera. Como primer paso en la solución del problema, se desea calcular el volumen de la parte sumergida de la esfera. Para tal fin se considera un punto P contenido en un círculo máximo de la esfera. Dicho círculo máximo estará contenido en el plano que es perpendicular a la línea de visión cuando se mira la figura de frente. En otras palabras, cuando se interpreta la figura como tridimensional, la línea que une el centro de la esfera con el punto P debe ser perpendicular a la dirección en que apunta un lápiz que se pare sobre el dibujo.

Considere ahora el segundo panel en la Figura 1. El punto superior es el centro de la esfera, por lo que el segmento que une los dos puntos tiene magnitud r. Los dos segmentos de recta que aparecen en la parte derecha representen la semi-altura de la esfera, por lo que su suma es r. La altura "y" mide qué tan alto se encuentra colocado el punto P respecto a la parte más baja de la esfera. El eje "y" se considerará que está en la dirección del segmento d. Si se considera un círculo cuyo plano es perpendicular a dicho eje, ubicado a la altura "y", su área estará dada por $A(y) = \pi b^2$ donde b es la base del triángulo que aparece en la Figura 1. Observe que la base b es función del radio r de la esfera y de la altura "y" del punto P. La base b se puede calcular usando el teorema de Pitágoras y está dada por

$$b(r, y) = [r^2 - (r - y)^2]^{1/2}.$$

Si se integran todas las áreas $A(y)$ desde $y = 0$ hasta $y = d$ se obtiene el volumen V_d de la parte sumergida de la esfera

$$V_d = \int_0^d \pi[r^2 - (y - r)^2]dy = \pi d^2(3r - d)/3.$$

Así que la masa del agua desplazada es

$$M_a = \rho_{\text{agua}} V_d = \pi d^2(3r - d)/3 \text{ (en gramos)}$$

pues la densidad del agua es $\rho_{\text{agua}} = 1\text{gr/cm}^3$.

El peso del agua desalojada será $P_a = gM_a$.

Por otro lado, la masa M_e de la esfera es

$$M_e = \rho V = \rho(4/3)\pi r^3,$$

mientras que le peso de la esfera será $P_e = gM_e$.

Ahora bien, ya que por hipótesis la esfera permanece flotando, ello significa que la esfera es lo suficientemente liviana como para que el peso del agua que desaloja equilibre su peso gravitacional. O sea que $P_a = P_e$, por lo que $M_a = M_e$ y

$$\rho(4/3)\pi r^3 = \pi d^2(3r - d)/3.$$

Esto indica que debe resolverse la ecuación $4\rho r^3 = d^2(3r - d)$, equivalente a

$$d^3 - 3rd^2 + 4\rho r^3 = 0. \tag{1}$$

Obsérvese que la profundidad d depende de los valores que asuman los parámetros ρ y r; es decir, d es función de ρ y r. La ecuación (1) es cúbica y no existe una fórmula simple que exprese d en función de ρ y r.

Se dividirá el estudio de la ecuación (1) en dos casos.

CASO I. ρ o r sean muy pequeños, en cuyo caso se obtiene que

$$d^2(d - 3r) = 0,$$

lo que indica que $d = 0$ o $d = 3r$. La solución $d = 3r$ no es congruente con la hipótesis de que la esfera flota, por lo que la única solución posible es $d = 0$.

El resultado $d = 0$ indica que la esfera permanece completamente en la superficie, lo cual puede deberse a dos situaciones:

i) El cuerpo es muy liviano ($\rho = 0$) por lo que el peso del agua que desplaza es mucho mayor al peso del cuerpo. Esto se observa cuando se introduce un globo inflado en un recipiente con agua o una bolsa sellada llena de aire.

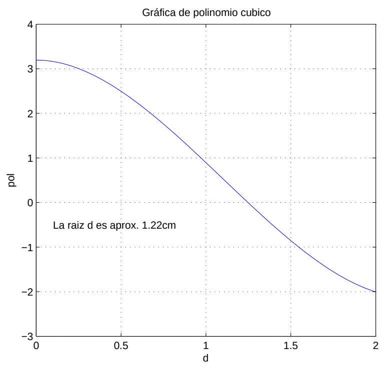
ii) El cuerpo es muy pequeño ($r = 0$). Aunque su densidad de masa puede no ser despreciable (como en el caso de los zancudos patinadores) sus dimensiones son tan pequeñas que el peso del cuerpo no es suficiente para vencer la llamada tensión superficial del liquido sobre el que se encuentra. (La tensión superficial es la responsable de que en la superficie de todos los líquidos se forme una especie de pequeña membrana, por la que caminan algunos pequeños insectos sin hundirse).

CASO II. Ni ρ ni r son despreciables, por lo que debe utilizarse alguna técnica para resolver del modo más general posible la ecuación (1). En el siglo XIV el matemático italiano Cardano obtuvo un método para resolver ecuaciones cúbicas polinomiales cuya formula general es larga y engorrosa, necesitándose en ocasiones obtener raíces cúbicas de números complejos. Otra forma de obtener las soluciones de (1), conocidos ρ y r, es utilizando métodos numéricos para la búsqueda de raíces de ecuaciones en una variable.

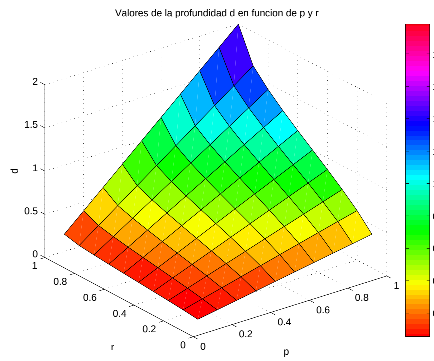
La Figura 2(a) muestra cómo se comporta el polinomio $p(d) = d^3 - 3rd^2 + 4\rho r^3$ para valores de $\rho = 0.6\mathrm{gr/cm}^3$ y $r = 1.1\mathrm{cm}$. En este caso, la raíz de $p(d)$ que es congruente con el problema es $d = 1.22\mathrm{cm}$.

La Figura 2(b) fue obtenida con MATLAB y muestra las raíces d del polinomio $P(d, r, \rho) = d^3 - 3rd^2 + 4\rho r^3$ cuando se le asignan distintos valores a los parámetros r y ρ.

Como es de esperarse, para valores de r o ρ muy pequeños, la distancia d a la que el cuerpo se sumerge es muy pequeña, pues se cae en el caso I ya analizado. Para valores de r y ρ significativos, la distancia d aumenta de manera semi-lineal conforme crecen dichos parámetros.



(a)



(b)

Figura 2: (a) Comportamiento del polinomio $p(d) = d^3 - 3rd^2 + 4\rho r^3$ para valores de $\rho = 0.6\text{gr/cm}^3$ y $r = 1.1\text{cm}$. (b) Raíces d del polinomio $P(d, r, \rho) = d^3 - 3rd^2 + 4\rho r^3$ cuando se le asignan distintos valores a los parámetros r y ρ.

CONCLUSIÓN: La ecuación (1) define una superficie en el espacio que relaciona los valores de r, p y d. Este ejemplo muestra cómo los conceptos físicos extraídos de la realidad se entrelazan con problemas que aparentemente son "completamente matemáticos". Este puente entre "realidad" y "abstracción matemática" suele presentarse con mucha frecuencia en la investigación pura y aplicada. Las técnicas numéricas modernas apoyadas fuertemente por la computadora permiten llegar rápidamente a conclusiones mediante herramientas visuales, como las gráficas ya mostradas. En los tiempos de Arquímides no existían computadoras que resolvieran ecuaciones como (1). Obtener un solo valor para d a partir del par (ρ, r) implicaba invertir una gran cantidad de tiempo en cálculos. Trazar la última gráfica requeriría de semanas o meses de esfuerzo. Así que no es insensato decir que si Arquímides y otros genios de la antigüedad vivieran en nuestros días, es posible que, valiéndose de las técnicas modernas, hubieran seguido un camino similar al ya mostrado para resolver en unas pocas horas el problema planteado. Arquímides, con su vocación innata, y tomando el problema anterior como evidencia, seguramente amaría a las matemáticas y a la física; pero también, como muchos de nosotros, amaría la computadora.