Integral de norma

M. C. Fausto Arturo Contreras Rosales
Departamento de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma de Aguascalientes

Es bien sabido que la integral de Lebesgue es muy superior a la de Riemann porque integra más funciones y posee propiedades de convergencia más generales. Sin embargo, existe otra integral, llamada integral de norma (gauge) o integral de Henstock-Kurzweil, que hace de las dos integrales anteriores casos particulares. Estas pequeñas notas tienen como propósito motivar la definición de esta integral y mostrar cómo se integran dos funciones a manera de ejemplos.

La motivación de la integral es por medio del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a, b]$, entonces la conclusión deseada del TFC es

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Se conocen funciones que no cumplen lo anterior. La versión del TFC para la integral de Riemann requiere la hipótesis de la integrabilidad de f' . La integral de Lebesgue sufre del mismo defecto aunque la hipótesis necesaria es otra.

No obstante, supóngase que tenemos una función derivable en $[a, b]$ y veamos como podemos intentar una prueba del TFC. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. En cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ buscamos un punto t_i que aproxime el término $f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ al valor $f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Si esta elección es posible en cada subintervalo, entonces la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ proporcionaría una aproximación al valor deseado de la integral, a saber $f(b) - f(a)$.

El siguiente lema muestra que, en algún sentido, este es el caso.

Lema 1 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en $z \in [a,b]$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que*

$$|f(v) - f(u) - f'(z)(v-u)| \leq \varepsilon(v-u)$$

siempre que $u \leq z \leq v$, y $[u,v] \subseteq [a,b] \cap (z-\delta, z+\delta)$.

Demostración: Como f es derivable en $z \in [a,b]$, hay un $\delta > 0$ que satisface

$$\left| \frac{f(x) - f(z)}{x - z} - f'(z) \right| < \varepsilon$$

para $0 < |x - z| < \delta$, $x \in [a,b]$. Si $z = u$ o $z = v$, la conclusión del lema es inmediata, así que puede asumirse que $u < z < v$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u) - f'(z)(v-u)| &\leq |f(v) - f(z) - f'(z)(v-z)| \\ &\quad + |f(z) - f(u) - f'(z)(z-u)| \\ &< \varepsilon(v-z) + \varepsilon(z-u) \\ &= \varepsilon(v-u). \end{aligned}$$

Si es posible dar una partición de $[a,b]$ de tal modo que el punto $t \in [x_i, x_{i+1}]$ y el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ satisfagan la conclusión del Lema 1, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) \; - \; [f(b) - f(a)] \; \right| \\ &\qquad\qquad = \left| \sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| \\ &\qquad\qquad < \varepsilon \sum_{i=0}^{n} [x_{i+1} - x_i] \\ &\qquad\qquad = \varepsilon[b-a]. \end{aligned} \tag{1}$$

y con ello la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ da una buena aproximación del valor deseado de la integral de f' sobre $[a,b]$, $f(b) - f(a)$.

Ahora bien, el número $\delta = \delta(z)$ dado en la conclusión del Lema 1 depende del punto $z \in [a,b]$, e indudablemente variará cuando z varíe en $[a,b]$, y del comportamiento de la función f. Luego, puede no existir una constante

$\delta > 0$ que funcione para todo punto en $[a, b]$. Si fuera el caso, ello se enlazaría con la definición de integrabilidad según Riemann, que dice que una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, b]$ si existe un número A que satisface que para cada $\varepsilon > 0$ podemos elegir un $\delta > 0$ tal que si

$$\max\{x_{i+1} - x_i : 1 \leq i \leq n\} < \delta \text{ y } t_i \in [x_i, x_{i+1}] \tag{2}$$

entonces

$$\left| \sum_{i=0}^{n} g(t_i)(x_{i+1} - x_i) - A \right| < \varepsilon.$$

Sin embargo, supóngase que podemos escribimos la condición (2) en la siguiente forma

$$t_i - \delta < x_i \leq t_i \leq x_{i+1} < t_i + \delta.$$

La dificultad reside en el hecho de que no se puede, en general, encontrar una constante $\delta > 0$ que satisfaga esta condición para todo $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Pero como para cada $t \in [a, b]$ sí hay un $\delta(t) > 0$ que cumple la condición del Lema 1, éste sugiere que se remplace la desigualdad anterior por

$$t_i - \delta(t_i) < x_i \leq t_i \leq x_{i+1} < t_i + \delta(t_i) \tag{3}$$

Podemos entonces garantizar que el Lema 1 aplica en todo el intervalo $[a, b]$ y los cálculos en (1) muestran que la suma de Riemann para cualquier partición y cualquier elección de puntos que satisfaga (3) dará una buena aproximación al valor deseado de la integral.

De acuerdo con lo anterior, se puede considerar definir una nueva integral simplemente reemplazando la constante $\delta > 0$ en la definición de Riemann por una función positiva $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$. Nos referiremos a esta integral como la *integral de norma* (del vocablo inglés *gauge*). Esta integral también es conocida como integral de Henstock-Kurzweil o integral de Riemann generalizada. A continuación se definen el resto de los elementos necesarios para definir formalmente la integral de norma.

Una partición etiquetada de un intervalo $I = [a, b]$ es un conjunto finito de pares ordenados $D = \{(t_i, I_i) : 1 \leq i \leq m\}$ donde $I_i : 1 \leq i \leq m\}$ es una partición usual de I y $t_i \in I_i$. El punto t_i se llama etiqueta de subintervalo I_i. Si $g : I \to \mathbb{R}$, la suma de Riemann de g con respecto a $D = \{(t_i, I_i) : 1 \leq i \leq m\}$ se define como

$$S(g, D) = \sum_{i=1}^{m} g(t_i) l(I_i)$$

donde $l(I_i)$ es la longitud del subintervalo I_i. Se define lo que llamaremos una norma (gauge) como una función intervalo abierto valuada como

$$\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t)).$$

Con esto escribimos la condición (3) como

$$t_i \in I_i \subseteq \gamma(t_i). \tag{4}$$

Si $D = \{(t_i, I_i) : 1 \leq i \leq m\}$ es una partición etiquetada y γ es una norma en I, decimos que D es γ-fina si se verifica (4) para cada $i = 1, \ldots, m$. Este hecho lo denotaremos con $D \lll \gamma$. Procedemos ahora a definir la integral de norma de una función.

Definición 1 *Sea $g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. Se dice que g es integrable en norma sobre I si existe un número A tal que para cada $\varepsilon > 0$ hay una norma γ definida en I tal que $|S(g, D) - A| < \varepsilon$ siempre que $D \lll \gamma$.*

Es muy sencillo probar que el número A es único, y en tal caso, éste se llamará integral de g sobre I y se denotará como $\int_a^b g$.

Es importante hacer ver que para que la Definición 1 tenga sentido es necesario establecer que dada una norma γ en I, siempre se puede encontrar una partición etiquetada D de $D \lll \gamma$ que satisfaga $D \lll \gamma$. Pero esto no es más que el teorema de Heine-Borel.

En realidad en este punto ya se ha demostrado el TFC en su versión general.

Teorema 1 (TFC) *Supóngase que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable en cada punto de $[a, b]$. Entonces f' es integrable en norma sobre $[a, b]$ con*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Demostración: La demostración consiste en que dado $\varepsilon > 0$ se elige la norma con el δ del Lema 1. Con ello y los cálculos en (1) se tiene lo afirmado.

Se sigue de este teorema que las reglas usuales de antiderivadas se cumplen para esta nueva integral. También se puede probar que las propiedades de linealidad, monotonía y aditividad por intervalos se cumplen para la integral de norma, así como la formula de cambio de variable. Pero el propósito de estas notas es únicamente definir la integral y presentar algunos ejemplos.

Ejemplos.

1. La función de Dirichlet se define en $[0, 1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \mathbb{Q}; \\ 0, \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta función es integrable en norma sobre $[0, 1]$ con $\int_0^1 f = 0$. Para establecerlo sean $\varepsilon > 0$, y $\{r_i : k \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Se define $\delta : [0, 1] \to (0, \infty)$ como

$$\delta(t) = \begin{cases} \varepsilon/2^{k+1}, & t = r_k; \\ 1, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Con esta δ, sea $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$ la norma correspondiente. Para cualquier $D \lll \gamma$ se tiene que $l(I_i) < \varepsilon/2^k$. Luego, si $t \notin \mathbb{Q}$ el término de la suma de Riemann respectivo es cero, y si $t = r_k$, el término será también menor que $\varepsilon/2^k$. Esto nos permite establecer la desigualdad $|S(f, D)| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$ que nos dice que, en efecto, $\int_0^1 f = 0$.

2. La función de Thomae, definida en $[0, 1]$, está dada como

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q, \ p, q \in \mathbb{Z}, \ gcd(p, q) = 1; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta función es Riemann integrable sobre $[0, 1]$ con $\int_0^1 f = 0$. Con la ligera modificación

$$f(x) = \begin{cases} q, \ x = p/q, \ p, q \in \mathbb{Z}, \ gcd(p, q) = 1; \\ 0, \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

la función deja de ser acotada en $[0, 1]$ y por consiguiente no es Riemann integrable sobre $[0, 1]$. Pero si modificamos también la δ como

$$\delta(t) = \begin{cases} \varepsilon/q2^{k+1}, & t = p/q; \\ 1, & t \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

se procede como en el caso anterior para concluir que la función es integrable en norma sobre $[0, 1]$ con $\int_0^1 f = 0$.