

# El cometa Oterma

*Dra. Luz Vianey Vela Arévalo*  
*Departamento de Matemáticas y Física*  
*Universidad Autónoma de Aguascalientes*

El cometa 39P Oterma ha sido uno de los recientes visitantes a nuestro Sistema Solar. Su órbita tan particular ha dado lugar a numerosos estudios que en particular han mostrado el potencial de los métodos cualitativos de los sistemas dinámicos. En el presente trabajo, deseamos dar un bosquejo de estos métodos y herramientas matemáticas que de alguna manera explican el comportamiento de los cometas como cuerpos celestes, y además permiten la creación de nuevos problemas y soluciones que se han aplicado ya en diversas misiones espaciales.

Liisi Oterma (1915-2001) fue una astrónoma finlandesa, y la primera mujer en obtener el grado de Ph.D. (Doctor en Filosofía, por sus siglas en inglés) en astronomía en su país. Descubrió varios cometas periódicos, entre ellos el que lleva su nombre, el cometa Oterma [1].

Un cometa es un pequeño objeto astronómico similar a un asteroide, pero compuesto en su mayoría por hielo. Los cometas se mueven debido principalmente a su atracción por el Sol. Isaac Newton (1642-1727) ya sabía que la atracción gravitacional del Sol ocasiona que los cuerpos se muevan en órbitas parabólicas, hiperbólicas y elípticas (de las cuales las órbitas circulares son un caso particular). Los cometas periódicos (que repiten su movimiento) generalmente se mueven en órbitas altamente elípticas, con su afelio (punto más distante al Sol) muchas veces más distante que la órbita de Plutón. Así que un cometa es una “bola de hielo sucio”, que se compone de bióxido de carbono congelado, metano y agua, mezclados con polvo y varios minerales. Curiosamente, los cometas son cuerpos congelados, y no los objetos candentes que hemos visto en películas.

El cometa que nos ocupa aquí es el cometa Oterma, que fue observado en los alrededores del Sistema Solar durante el Siglo XX. Más precisamente,

el cometa Oterma se observó en 1910 en una trayectoria cercana a la órbita de Júpiter; en particular se observó que el cometa estaba siendo atraído por la masiva fuerza gravitacional de Júpiter. Entre los años de 1910 y 1980, el cometa Oterma produjo una trayectoria muy curiosa: pasó muy cerca de Júpiter hasta que cruzó la órbita de Jupiter, se quedó en el interior del Sistema Solar por 2 años Júpiter, durante los cuales Oterma dio tres revoluciones alrededor del Sol, y volvió a cruzar la órbita de Júpiter, ahora hacia el exterior, para alejarse del Sistema Solar nuevamente [2].

El cometa Oterma tiene un movimiento determinado principalmente por su atracción gravitacional por el Sol y por Júpiter. Si consideramos únicamente la atracción por el Sol, la trayectoria de Oterma tendría que ser una de las establecidas por Newton: una elipse, una parábola o una hipérbola. El modelo matemático que describe esta situación es el Problema restringido de tres cuerpos.

El problema restringido, plano y circular de tres cuerpos consiste en describir el movimiento *en el plano* de un objeto pequeño (un cometa) que es atraído por la fuerza gravitacional de dos cuerpos llamados *primarios* (el Sol y Júpiter) que se mueven en órbitas *circulares* alrededor de su centro de masa. Esta situación se puede describir con un modelo matemático en el que la principal suposición es que la masa del cometa es suficientemente pequeña para no afectar el movimiento de los dos primarios; de ahí el nombre de problema *restringido*.

Para determinar el modelo del problema restringido, plano y circular de tres cuerpos, usaremos un sistema coordenado en el plano  $(x, y)$  en el que la distancia entre los cuerpos primarios es 1, y las masas están normalizadas para que la masa total del sistema sea 1. En este caso, la masa del primario Júpiter está dada por

$$\mu = \frac{m_J}{m_J + m_S} = 0.0009537,$$

y la masa del Sol es pues  $1 - \mu$ . Debido a que los primarios Sol y Júpiter se mueven alrededor de su centro de masa, se coloca el origen en dicho centro de masa, luego la posición inicial de Júpiter es  $1 - \mu$  y la del Sol es  $-\mu$ . Esta es la situación representada en la Figura 1. Aún más, como los primarios se mueven en órbitas circulares a velocidad angular constante, se normaliza esta velocidad angular igual a 1, y se toma un sistema de coordenadas rotatorio; es decir, los ejes coordenados  $(x, y)$  rotan a la misma velocidad angular que los primarios. En este sistema de coordenadas rotatorio, los primarios se ven

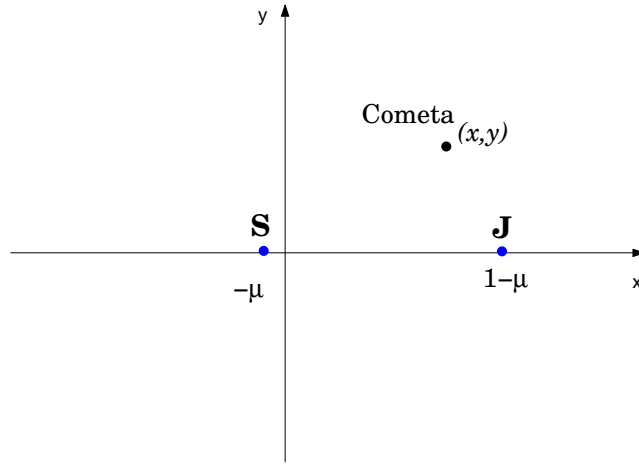


Figura 1: Sistema de coordenadas rotatorio del problema restringido, plano y circular de tres cuerpos. S es la posición del Sol, J es la posición de Júpiter.

fijos.

Para determinar las ecuaciones de movimiento del cometa, es necesario usar la segunda Ley de Newton (fuerza = masa x aceleración) y la Ley de gravitación universal (la fuerza de gravitación entre dos cuerpos es igual al producto de las masas entre el cuadrado de la distancia que los separa). Estas leyes se aplican para determinar las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento en ambas direcciones  $x$  y  $y$ . Se requieren algunos cálculos sencillos para introducir el sistema de coordenadas rotatorio, que consisten en una transformación de coordenadas del tipo  $(X, Y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$ . Después de hacer esto, las ecuaciones de movimiento del cometa en el problema restringido, plano y circular de tres cuerpos son:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}$  y  $r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}$  son las respectivas distancias del cometa a el Sol y a Júpiter. En esta notación, el punto ( $\dot{\phantom{x}}$ ) representa derivación con respecto al tiempo; así  $\dot{x} = dx/dt$  y  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ .

Estas ecuaciones se pueden integrar numéricamente para obtener la trayec-

toria de una condición inicial dada. Sin embargo, resulta imposible adentrarse en la infinidad de trayectorias a estudiar de esta manera. El problema restringido plano y circular de tres cuerpos ha sido estudiado extensivamente, siendo Henri Poincaré (1854-1912) quien recibió en 1889 el premio del Rey de Suecia y Noruega que había sido ofrecido por la solución del problema de tres cuerpos en series de potencias. De hecho, Poincaré no pudo encontrar tal solución, pero sus contribuciones en este problema tenían una gran cantidad de ideas importantes que contribuyeron al desarrollo de la mecánica, de los sistemas dinámicos, y de muchas otras disciplinas matemáticas [3].

Un método de estudio de este problema consiste en calcular la *frecuencia instantánea* asociada a las trayectorias [4]. Este método, llamado *análisis de tiempos-frecuencias basado en ondeletas*, consiste en calcular la transformada de ondeletas (*wavelets* en inglés) de las trayectorias, para extraer la frecuencia instantánea de la órbita. La frecuencia instantánea se puede entender como la razón de cambio (o velocidad) de la fase de oscilación de la órbita. Detalles de la definición de frecuencia instantánea, la transformada de ondeletas, y el análisis de tiempos-frecuencias puede encontrarse en [4].

Un ejemplo de aplicación del análisis de tiempos-frecuencias al problema restringido de tres cuerpos se ilustra en la Figura 2. Se calculó numéricamente una trayectoria, que está representada en el primer panel en azul, con condición inicial representada por el punto rojo. La órbita de Júpiter está representada en verde, y el Sol se encuentra prácticamente en el origen. La trayectoria del cometa comienza en la región exterior del Sistema Solar. Después de un cierto tiempo el cometa cruza la órbita de Júpiter y se mantiene dando revoluciones alrededor del Sol en el interior del Sistema Solar, para después nuevamente cruzar la órbita de Júpiter hacia el exterior. Esta es una trayectoria similar, en términos generales, a la del cometa Oterma.

En el segundo panel de la Figura 2, se representa la frecuencia instantánea de la trayectoria. Recordar que la frecuencia de Júpiter es 1 (en nuestro sistema normalizado de coordenadas), luego el cometa inicialmente tiene una frecuencia menor a la de Júpiter, lo cual concuerda con que el cometa se encuentra en la región exterior del Sistema Solar. Cuando el cometa cruza la órbita de Júpiter hacia la región interior, la frecuencia se incrementa hasta ser mayor que 1. Cuando el cometa regresa a la región exterior, su frecuencia vuelve a ser menor que 1. Así pues, la frecuencia instantánea del cometa describe claramente la trayectoria del cometa: si es que está en la región exterior o interior, cuándo cruza hacia la región interior, cuánto tiempo se

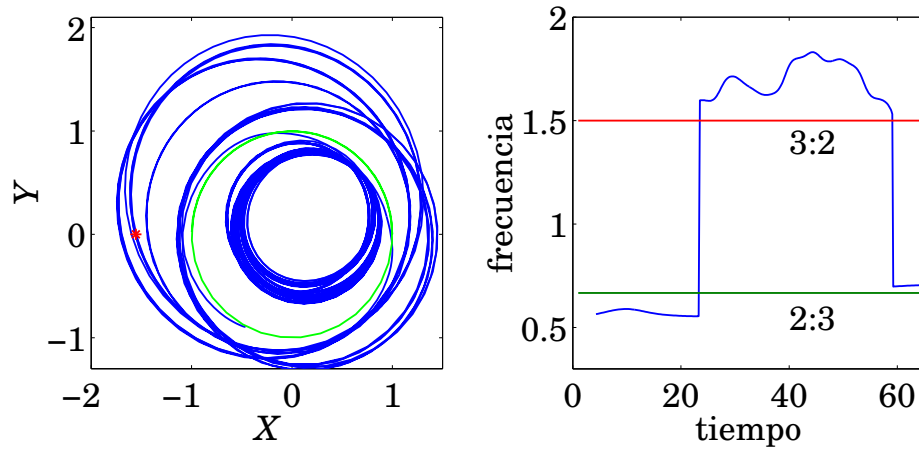


Figura 2: Trayectoria del cometa en la que hay una transición del exterior de la órbita de Júpiter (verde) al interior, y viceversa. La frecuencia instantánea indica que se visitan las resonancias zonas de resonancia 2:3 y 3:2. Las condiciones iniciales son  $x^0 = -1.556$ ,  $v_x^0 = 0.05$ ,  $y^0 = 0$ ,  $E = -1.515$ .

mantiene en el interior, etc. La frecuencia instantánea además nos da información sobre las resonancias. Si el cometa revoluciona dos veces alrededor del Sol mientras Júpiter lo hace tres veces, decimos que existe una resonancia 2:3. Análogamente, si el cometa da tres revoluciones mientras que Júpiter da dos, decimos que hay una resonancia 3:2. En el segundo panel, estas resonancias están marcadas con líneas. Vemos que en esta trayectoria, el cometa está cerca de la resonancia 2:3, transiciona a la región interior y cruza la resonancia 3:2, y al regresar al exterior está nuevamente cerca de la resonancia 2:3. Este hecho se conoce como *transición de resonancias*, y se ha observado que tiene consecuencias importantes en el transporte de masa entre el exterior e interior del Sistema Solar [4].

## Más información

Hemos visto que el estudio de la trayectoria del cometa Oterma conlleva el desarrollo de nuevas técnicas matemáticas y su aplicación en modelos relativamente simples. Si el lector quiere saber más sobre cometas, una fuente inagotable es por supuesto la internet. Por ejemplo, consulte en

<http://cfa-www.harvard.edu/iau/lists/CometLists.html>

las listas de cometas que se han acercado más a la Tierra, los últimos que se han observado, los que se observarán en los próximos años, etc., así como animaciones de los muchos cometas observables.

El proyecto Génesis (Genesis Mission) consistió en enviar un vehículo espacial a una trayectoria alrededor del Sol a coleccionar muestras de viento solar. Se llevó a cabo de agosto de 2001 a septiembre de 2004, y una cápsula conteniendo las muestras regresó a la Tierra y debió ser capturada durante el proceso de aterrizaje por un helicóptero en algún lugar del estado de Utah, E.U. Más información se puede encontrar en

<http://genesission.jpl.nasa.gov>.

El proyecto Génesis tuvo inspiración en el estudio del problema restringido de tres cuerpos, puesto que la trayectoria se calculó tomando como modelo lo que se conoce como órbita Halo, que revoluciona alrededor del Sol, y que tiene como principal característica que existe una “súper carretera” desde un punto cercano a la Tierra para llegar a ella. Esta súper carretera es un objeto matemático llamado *variedad estable* de la órbita Halo. Como se ve, algunos objetos matemáticos viven literalmente en el cielo.

## Bibliografía

- [1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Liisi\\_Oterma](http://en.wikipedia.org/wiki/Liisi_Oterma)
- [2] W. S. Koon, *et al.*, *Chaos* **10**, 427, (2000).
- [3] C. L. Siegel y J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, (1971).
- [4] L. V. Vela-Arevalo y J. E. Marsden, *Class. Quantum. Grav.* **21**, S351 (2004).