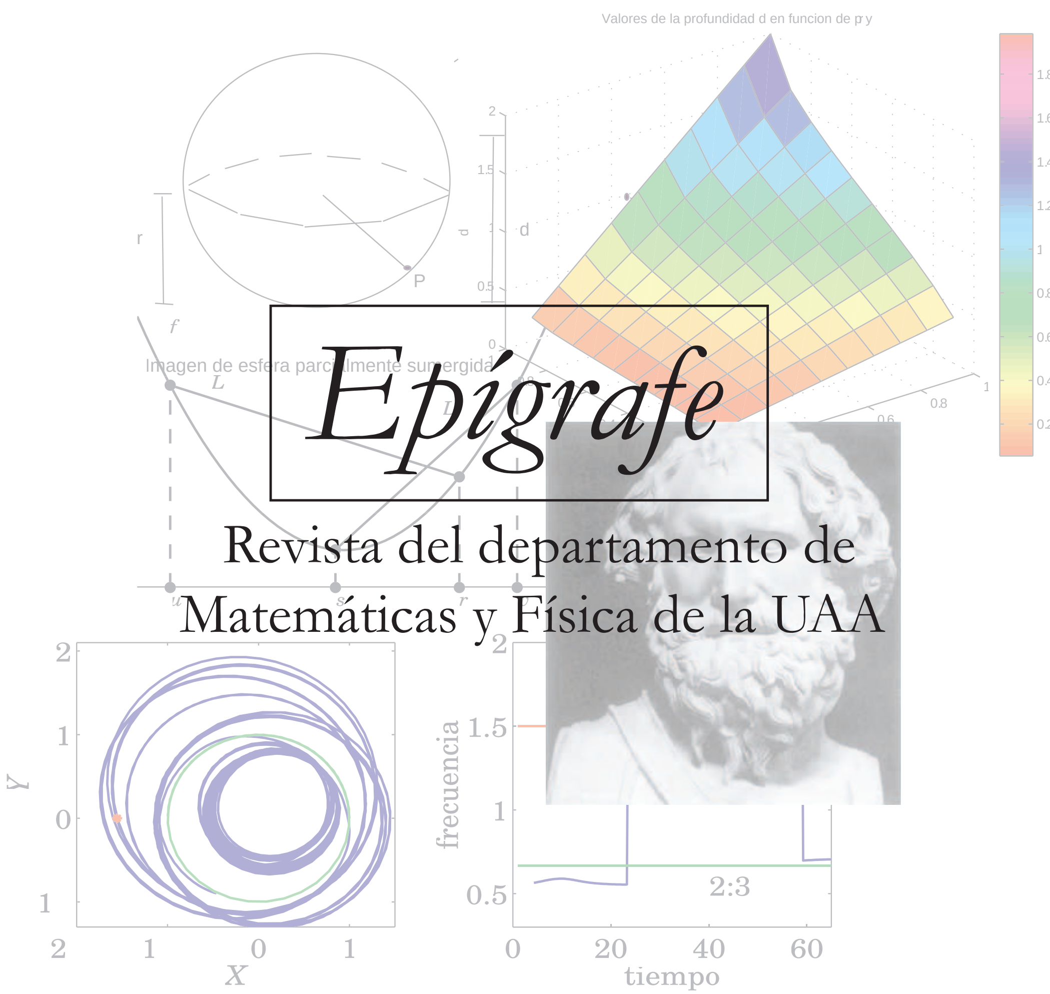



# *Epígrafe*

## Revista del departamento de Matemáticas y Física de la UAA

Primer Número
28 de junio de 2005

# Contenido




Primer número de *Epígrafe*
Revista del Departamento de Matemáticas y Física
de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.



Dirección de internet (provisional):
http://www.cns.gatech.edu/~luzvela/epigrafe

# Presentación

La revista del Departamento de Matemáticas y Física es un instrumento de divulgación de ideas y recursos relacionados con las áreas de Matemáticas y Física para la comunidad relacionada con estas ciencias en la Universidad Autónoma de Aguascalientes, en la ciudad de Aguascalientes, y en general con la comunidad científica del país.

## Objetivos de la Revista

- Difundir entre los estudiantes de licenciatura y posgrado tópicos básicos de matemáticas y física.
- Implementar un instrumento de comunicación de avisos y eventos relacionados con el departamento de Matemáticas y Física.
- Difusión a la comunidad de Matemáticas y Física a nivel local y nacional sobre avances en la carrera de Matemáticas aplicadas y las - maestrías en Matemáticas y Estadística.
- Mantener un vínculo entre los profesores del departamento de Matemáticas y Física, los estudiantes y egresados de la carrera de Licenciado en Matemáticas Aplicadas y la comunidad universitaria.
- Involucrar a los estudiantes de la carrera de Licenciado en Matemáticas Aplicadas en la producción formal de textos científicos accesibles a la comunidad matemática.
- Incrementar el nivel de interés de la comunidad por las ciencias exactas.

# Lineamientos

La revista publicará **artículos de divulgación** esencialmente. Estos pueden tener diferentes enfoques, tales como artículos de investigación, de metodología de la enseñanza de las matemáticas y la física o de historia en estas ramas del conocimiento científico. Existirán artículos panorámicos por invitación. Se toma por supuesto que los autores se comprometen a que sus artículos no han sido previamente sometidos en alguna otra revista, y deberán enviar sus manuscritos a cualquier miembro del comité editorial observando los lineamientos siguientes:

1. Todos los artículos serán sometidos a revisión por parte del comité editorial. Sin embargo, aquellos artículos que sean de investigación serán sometidos a un escrutinio especializado. En cualquier caso, el comité editorial se desliga de artículos apócrifos que puedan presentarse.

2. Los artículos deberán contener: Título, resumen, introducción, bibliografía y las correspondientes secciones donde se desarrolle el material. La sección referente al título debe contener al menos el (los) nombre (s) del (los) autor (es), institución (es) y dirección (es) electrónica (s).

3. Se recomienda que el archivo fuente de los artículos sea en Word o, preferentemente, en Latex, y en cualquier caso enviar una versión PDF. En la versión en PDF eliminar toda información referente a los autores.

Se notificará al autor acerca del seguimiento de sus artículos. Todos los artículos aceptados para su publicación son propiedad de la Universidad Autónoma de Aguascalientes y la reproducción de cualquier parte de estos queda prohibida, a reserva de contar con una autorización por escrito por parte del comité editorial de la revista.

# El Comité editiorial

# Integral de norma

*M. C. Fausto Arturo Contreras Rosales*
*Departamento de Matemáticas y Física*
*Universidad Autónoma de Aguascalientes*

Es bien sabido que la integral de Lebesgue es muy superior a la de Riemann porque integra más funciones y posee propiedades de convergencia más generales. Sin embargo, existe otra integral, llamada integral de norma (gauge) o integral de Henstock-Kurzweil, que hace de las dos integrales anteriores casos particulares. Estas pequeñas notas tienen como propósito motivar la definición de esta integral y mostrar cómo se integran dos funciones a manera de ejemplos.

La motivación de la integral es por medio del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a, b]$ , entonces la conclusión deseada del TFC es

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Se conocen funciones que no cumplen lo anterior. La versión del TFC para la integral de Riemann requiere la hipótesis de la integrabilidad de $f'$ . La integral de Lebesgue sufre del mismo defecto aunque la hipótesis necesaria es otra.

No obstante, supóngase que tenemos una función derivable en $[a, b]$ y veamos como podemos intentar una prueba del TFC. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. En cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ buscamos un punto $t_i$ que aproxime el término $f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ al valor $f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Si esta elección es posible en cada subintervalo, entonces la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ proporcionaría una aproximación al valor deseado de la integral, a saber $f(b) - f(a)$.

El siguiente lema muestra que, en algún sentido, este es el caso.

**Lema 1** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en $z \in [a,b]$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que*

$$|f(v) - f(u) - f'(z)(v-u)| \leq \varepsilon(v-u)$$

*siempre que $u \leq z \leq v$, y $[u,v] \subseteq [a,b] \cap (z-\delta, z+\delta)$.*

**Demostración:** Como $f$ es derivable en $z \in [a,b]$, hay un $\delta > 0$ que satisface

$$\left| \frac{f(x) - f(z)}{x - z} - f'(z) \right| < \varepsilon$$

para $0 < |x-z| < \delta$, $x \in [a,b]$. Si $z = u$ o $z = v$, la conclusión del lema es inmediata, así que puede asumirse que $u < z < v$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u) - f'(z)(v-u)| &\leq |f(v) - f(z) - f'(z)(v-z)| \\ &\quad + |f(z) - f(u) - f'(z)(z-u)| \\ &< \varepsilon(v-z) + \varepsilon(z-u) \\ &= \varepsilon(v-u). \end{aligned}$$

Si es posible dar una partición de $[a,b]$ de tal modo que el punto $t \in [x_i, x_{i+1}]$ y el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ satisfagan la conclusión del Lema 1, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) \right. &- \left. [f(b) - f(a)] \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| \\ &< \varepsilon \sum_{i=0}^{n} [x_{i+1} - x_i] \\ &= \varepsilon[b-a]. \end{aligned} \tag{1}$$

y con ello la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ da una buena aproximación del valor deseado de la integral de $f'$ sobre $[a,b]$, $f(b) - f(a)$.

Ahora bien, el número $\delta = \delta(z)$ dado en la conclusión del Lema 1 depende del punto $z \in [a,b]$, e indudablemente variará cuando $z$ varíe en $[a,b]$, y del comportamiento de la función $f$. Luego, puede no existir una constante

$\delta > 0$ que funcione para todo punto en $[a, b]$. Si fuera el caso, ello se enlazaría con la definición de integrabilidad según Riemann, que dice que una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, b]$ si existe un número $A$ que satisface que para cada $\varepsilon > 0$ podemos elegir un $\delta > 0$ tal que si

$$\text{máx}\{x_{i+1} - x_i : 1 \leq i \leq n\} < \delta \text{ y } t_i \in [x_i, x_{i+1}] \tag{2}$$

entonces

$$\left| \sum_{i=0}^{n} g(t_i)(x_{i+1} - x_i) - A \right| < \varepsilon.$$

Sin embargo, supóngase que podemos escribimos la condición (2) en la siguiente forma

$$t_i - \delta < x_i \leq t_i \leq x_{i+1} < t_i + \delta.$$

La dificultad reside en el hecho de que no se puede, en general, encontrar una constante $\delta > 0$ que satisfaga esta condición para todo $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Pero como para cada $t \in [a, b]$ sí hay un $\delta(t) > 0$ que cumple la condición del Lema 1, éste sugiere que se remplace la desigualdad anterior por

$$t_i - \delta(t_i) < x_i \leq t_i \leq x_{i+1} < t_i + \delta(t_i) \tag{3}$$

Podemos entonces garantizar que el Lema 1 aplica en todo el intervalo $[a, b]$ y los cálculos en (1) muestran que la suma de Riemann para cualquier partición y cualquier elección de puntos que satisfaga (3) dará una buena aproximación al valor deseado de la integral.

De acuerdo con lo anterior, se puede considerar definir una nueva integral simplemente reemplazando la constante $\delta > 0$ en la definición de Riemann por una función positiva $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$. Nos referiremos a esta integral como la *integral de norma* (del vocablo inglés *gauge*). Esta integral también es conocida como integral de Henstock-Kurzweil o integral de Riemann generalizada. A continuación se definen el resto de los elementos necesarios para definir formalmente la integral de norma.

Una partición etiquetada de un intervalo $I = [a, b]$ es un conjunto finito de pares ordenados $D = \{(t_i, I_i) : 1 \leq i \leq m\}$ donde $I_i : 1 \leq i \leq m\}$ es una partición usual de $I$ y $t_i \in I_i$. El punto $t_i$ se llama etiqueta de subintervalo $I_i$. Si $g : I \to \mathbb{R}$, la suma de Riemann de $g$ con respecto a $D = \{(t_i, I_i) : 1 \leq i \leq m\}$ se define como

$$S(g, D) = \sum_{i=1}^{m} g(t_i) l(I_i)$$

donde $l(I_i)$ es la longitud del subintervalo $I_i$. Se define lo que llamaremos una norma (gauge) como una función intervalo abierto valuada como

$$\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t)).$$

Con esto escribimos la condición (3) como

$$t_i \in I_i \subseteq \gamma(t_i). \tag{4}$$

Si $D = \{(t_i, I_i) : 1 \leq i \leq m\}$ es una partición etiquetada y $\gamma$ es una norma en $I$, decimos que $D$ es $\gamma$-fina si se verifica (4) para cada $i = 1, \ldots, m$. Este hecho lo denotaremos con $D \ll \gamma$. Procedemos ahora a definir la integral de norma de una función.

**Definición 1** *Sea $g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. Se dice que $g$ es integrable en norma sobre $I$ si existe un número $A$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ hay una norma $\gamma$ definida en $I$ tal que $|S(g, D) - A| < \varepsilon$ siempre que $D \ll \gamma$.*

Es muy sencillo probar que el número $A$ es único, y en tal caso, éste se llamará integral de $g$ sobre $I$ y se denotará como $\int_a^b g$.

Es importante hacer ver que para que la Definición 1 tenga sentido es necesario establecer que dada una norma $\gamma$ en $I$, siempre se puede encontrar una partición etiquetada $D$ de $D \ll \gamma$ que satisfaga $D \ll \gamma$. Pero esto no es más que el teorema de Heine-Borel.

En realidad en este punto ya se ha demostrado el TFC en su versión general.

**Teorema 1 (TFC)** *Supóngase que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable en cada punto de $[a, b]$. Entonces $f'$ es integrable en norma sobre $[a, b]$ con*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

**Demostración:** La demostración consiste en que dado $\varepsilon > 0$ se elige la norma con el $\delta$ del Lema 1. Con ello y los cálculos en (1) se tiene lo afirmado.

Se sigue de este teorema que las reglas usuales de antiderivadas se cumplen para esta nueva integral. También se puede probar que las propiedades de linealidad, monotonía y aditividad por intervalos se cumplen para la integral de norma, así como la formula de cambio de variable. Pero el propósito de estas notas es únicamente definir la integral y presentar algunos ejemplos.

## Ejemplos.

1. La función de Dirichlet se define en $[0,1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1, \; x \in \mathbb{Q}; \\ 0, \; x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta función es integrable en norma sobre $[0,1]$ con $\int_0^1 f = 0$. Para establecerlo sean $\varepsilon > 0$, y $\{r_i : k \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Se define $\delta : [0,1] \to (0,\infty)$ como

$$\delta(t) = \begin{cases} \varepsilon/2^{k+1}, \; t = r_k; \\ 1, \qquad\;\; t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Con esta $\delta$, sea $\gamma(t) = (t-\delta(t), t+\delta(t))$ la norma correspondiente. Para cualquier $D \ll \gamma$ se tiene que $l(I_i) < \varepsilon/2^k$. Luego, si $t \notin \mathbb{Q}$ el término de la suma de Riemann respectivo es cero, y si $t = r_k$, el término será también menor que $\varepsilon/2^k$. Esto nos permite establecer la desigualdad $|S(f,D)| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$ que nos dice que, en efecto, $\int_0^1 f = 0$.

2. La función de Thomae, definida en $[0,1]$, está dada como

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, \; x = p/q, \; p,q \in \mathbb{Z}, \; gcd(p,q) = 1; \\ 0, \quad\; x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta función es Riemann integrable sobre $[0,1]$ con $\int_0^1 f = 0$. Con la ligera modificación

$$f(x) = \begin{cases} q, \; x = p/q, \; p,q \in \mathbb{Z}, \; gcd(p,q) = 1; \\ 0, \; x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

la función deja de ser acotada en $[0,1]$ y por consiguiente no es Riemann integrable sobre $[0,1]$. Pero si modificamos también la $\delta$ como

$$\delta(t) = \begin{cases} \varepsilon/q2^{k+1}, \; t = p/q; \\ 1, \qquad\quad\; t \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

se procede como en el caso anterior para concluir que la función es integrable en norma sobre $[0,1]$ con $\int_0^1 f = 0$.

# Las matemáticas: sus modelos y variables

*Leoncio Ibarra M.*
*Departamento de Matemáticas y Física*
*Universidad Autónoma de Aguascalientes*

## ¿Qué son las matemáticas?

Las matemáticas se pueden concebir como la ciencia que propone y aplica modelos abstractos, los cuales a su vez son construidos en términos de relaciones precisas entre variables con al menos escala ordinal para las características de interés correspondientes, luego la diversidad de variables y de sus relaciones entre ellas, explica la variedad de modelos y de ramas de las matemáticas.

## Aplicar las matemáticas: un gran reto

La mayoría de los estudiosos de las matemáticas se centran en el conocimiento de las relaciones entre las variables involucradas en cada uno de los modelos posibles. Son pocos los que aplican esos modelos...

Los que sólo estudian los modelos, en general: asumen una actitud crítica respecto de su construcción formal, pero no respecto a su aplicabilidad, digamos que se fascinan con ellos como si fueran obras de arte y en todo caso, llegan a concluir: "siendo matemáticas es probable que alguien luego las aplicará"...

El proceso de aplicar los modelos tiene algunas particularidades que viene al caso subrayar en los siguientes incisos a fin de que se note que la naturaleza de las variables cuantificables involucradas en cada modelo influye más de lo que habíamos imaginado:

a). Cuando se quiere implementar computacionalmente un modelo, las variables que de origen eran continuas o infinitas, deberán discretizarse, pues todas las computadores sólo trabajan con variables discretas, no hay otra alternativa. Esto es: **después de hablar de geometrías diferenciables y continuas, debemos finalmente tratar con las geometría de puntos finitos...** *What?*

b). Al hacer una revisión crítica, de los valores posibles de las variables o del propio modelo: o NO contamos con instrumentos de medición con un buen grado de aproximación, o nos vemos en la penosa necesidad de incluir variables aleatorias en la formulación del modelo; entonces, debemos de aceptar que algunas de las variables no sólo NO son determinísticas sino también NO exactas, luego debemos conocer y aplicar técnicas del análisis numérico a fin de minimizar la propagación del error, si es que el modelo involucra un buen número de errores que son acumulables; y lo correspondiente de probabilidad y de estadística, dado el carácter aleatorio de las variables involucradas. Esto es: **después de creer en un mundo mecánico y exacto, resulta que finalmente el universo también juega a los dados y la aproximación es lo de hoy...** *What?*

c). Conforme se vayan agregando más variables a fin de completar el modelo, a la par que ya no es tan sencillo tener relaciones precisas entre las variables, o el modelo en definitiva se va complicando a un grado extremo, luego la mejor estrategia es respetar algunas relaciones básicas y los demás valores de las variables se vayan generando de acuerdo a su modelo de probabilidad y atendiendo a lo que establece la simulación al respecto. Esto es llegar aceptar que es descabellado pretender una formulación analítica completa del modelo, y para el caso, la mejor estrategia a la fecha sería identificar algunas reglas o relaciones básicas y que el azar y el tiempo aceleradamente simulado nos dé las respuestas sobre la evolución del modelo y la realidad que representa. Esto es: **se llega al punto de que el modelo determinístico es más complicado que la realidad o que pretenderlo no es una tarea a corto plazo... luego es mejor prescindir de él, prefiriendo otro formulado en términos aleatorios, si bien menos completo y preciso, sí más práctico...** *What?*

d). Como ya se puede inferir, el proceso de aplicar los modelos es más complicado de lo al principio parece, otra complicación derivada más de nuestra personalidad que del modelo, es cuando la solución dada por el modelo es por demás simplificada, aún cuando el modelo pudiera ser complicado en su formulación, y aplicarla tal cual, si bien es sencillo, no siempre es lo más adecuado. Esto es: **llegar al punto de acostumbrarnos a resolverlo todo con modelos simples, digamos, lineales de una o n-variables explicativas, cuando sabemos que no es cierto o la realidad a la que nos estamos enfrentando no es así, pero reconociendo que resulta cómodo asumirlo, y si nos ha funcionado, entonces... ¿para qué revisar críticamente la aplicabilidad acertada del modelo?. Se asume que el modelo debe ser bueno, algún valor debe tener, si no directo sí indirectamente; es decir, cualquier modelo por *maleta* que sea es formativo... ¿será?**

e). Las aplicaciones realmente interesantes, en la mayoría de los casos, requieren un uso intensivo o recursivo del modelo, y pretender hacerlo en papel o a mano no sería lo más práctico, luego la implementación computacional es inevitable lo mismo que el trabajo en equipo. Esto es: **llegar a descubrir que las máquinas en algunas tareas son superiores a cualquier individuo, y que la suma de las inteligencias no es aritmética, y que por lo tanto para aplicar algunos modelos debemos apoyarnos en las máquinas y en la suma de inteligencias...** *What?*

## Clasificación e importancia de las matemáticas

Hay muchas maneras de clasificar las matemáticas y de evaluar su importancia. Una clasificación de las matemáticas, poco conocida y complicada, sería por el tipo de relaciones entre las variables de cada modelo, otra clasificación sería por el tipo de sus modelos. Tampoco las clasificaciones tienen que ser sin traslapes; es decir, para ciertos fines, como en este caso, es posible tolerar una clasificación con traslapes.

Respecto a la importancia de una rama de las matemáticas o de sus modelos correspondientes, es común creer en su importancia sólo porque guarda relación con los modelos que yo prefiero o más conozco. Es más objetivo defender la importancia de un modelo o afirmar que un modelo es mejor que otro si a una parte de realidad de interés la representa o reproduce mejor, si con él podemos hacer mejores explicaciones, predicciones o transformaciones de esa realidad, entonces, bajo esta perspectiva las disciplinas orientadas hacia modelos con variables cualitativas, en algunos casos, podrían justificarse o preferirse.

En este escrito sólo nos fijaremos en la naturaleza de las variables involucradas en los modelos objeto de estudio de las matemáticas; este es un referente más definido, que caer en la discusión de que si un modelo de las matemáticas es puro o aplicado, ya que si alguno lo es puede pasar a ser lo otro. En todo caso, **proponemos que la formación de un matemático no está completa si no conoce una muestra representativa de modelos que involucren a todas las variables conocidas, y creemos que dentro de lo que se llame formación básica de un matemático se debe evitar privilegiar sólo a una clase de modelos, y por lo tanto se deberá incluir el conocimiento de modelos tanto clásicos como discretos. Pero, ¿qué tanto de modelos clásicos y qué tanto de modelos discretos? En teoría debería ser igual, 50 y 50; pero en la práctica los planes de estudio están atiborrados de modelos clásicos, el pensamiento *discreto* no goza a la fecha de *tradición*.**

# ¿Qué son las matemáticas discretas?

Pretendo exponer de manera muy sintética, la visión de dos grandes ramas de las matemáticas en términos de las variables que típicamente están involucradas en sus modelos correspondientes, para que finalmente se evalúe lo que son las matemáticas discretas en su exacta dimensión.

## Las matemáticas clásicas

Las matemáticas clásicas las definiremos como las que proponen y aplican modelos abstractos cuyas variables cuantificables son regularmente de los siguientes tipos:

a) Exactas, o

b) Continuas, o

c) Infinitas, o

d) Determinísticas .

A). UNA VARIABLE ES EXACTA, si cada uno de sus valores posibles se pueden conseguir mediante un procedimiento o algoritmo que consista de un número finito de pasos y el valor obtenido coincida con el valor teórico o ideal, o en el peor de los casos, el error asociado es prácticamente despreciable. Es decir, no tenemos duda de que cada salida del procedimiento o algoritmo correspondiente está bien definida y satisface adecuadamente nuestras expectativas o necesidades prácticas respectivas.

B). Si UNA VARIABLE ES CONTINUA en un intervalo, entonces siempre podemos pensar o justificar que entre sus valores posibles del intervalo, siempre puede haber dos valores de ella tan cercanos como se quiera o sea necesario; o bien, más precisamente, para cualesquier dos de sus valores posibles siempre existe un valor intermedio, todos tomados en el mismo intervalo, y por lo tanto, la cantidad de sus valores posibles en ese intervalo será interminable o no definida.

C).UNA VARIABLE ES INFINITA, si vislumbramos o aceptamos que ésta tiene una cantidad interminable de valores posibles, o más formalmente, podemos demostrar que hay al menos un subconjunto de los valores posibles de la variable, que sin ser el total, tiene tantos valores como el conjunto total de los valores posibles de la variable, es decir, se puede establecer un función biyectiva entre ellos, o sea entre un subconjunto propio y el conjunto total de los valores posibles de la variable.

D). UNA VARIABLE ES DETERMÍNISTICA, si sus valores posibles son predecibles, después de haber estudiado usualmente en un corto plazo y frecuentemente a tan sólo una pequeña cantidad de ellos, o más bien, hemos podido descubrir las relaciones entre sus valores y algunos otros valores mediante las cuales es posible predecir sus valores posibles y el error asociado a la predicción es despreciable o tolerable para el logro de la mayoría de los propósitos prácticos asociados.

## Las matemáticas discretas

Las matemáticas discretas son aquellas que proponen y aplican modelos abstractos cuyas variables cuantificables son regularmente de los siguientes tipos:

A) Inexactas pero aproximadas, o

B) Discontinuas y discretas, o

C) Finitas, o

D) Aleatorias.

En general, las matemáticas más conocidas, como la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral, las ecuaciones diferenciales, etc. las podemos ubicar convencionalmente en la primera gran rama referida como las matemáticas clásicas. Por otra parte, el análisis numérico, una parte de la probabilidad y la estadística, la simulación discreta, una parte de la investigación de operaciones, una gran parte las matemáticas financieras, la combinatoria, la teoría de juegos, la teoría de grafos y redes, máquinas de estados finitos, una parte de la teoría de números, una parte del álgebra moderna, álgebra booleana, codificación, análisis de algoritmos, funciones numéricas discretas y funciones generatrices, diseños dombinatorios, geometrías finitas, lógica, teoría de conjuntos finitos, optimización combinatoria, lenguajes formales, modelos o procesos estocásticos, etc., las podemos ubicar convencionalmente en la segunda gran rama llamada matemáticas discretas. Obviamente habrá matemáticas que no será fácil ubicarlas en una sola gran rama, en todo caso serán tanto clásicas como discretas, o dependiendo de la subrama o área o tema en turno, serán más una que de la otra, pero las que claramente se puedan ubicar en la gran rama de las matemáticas discretas, se están presentando como matemáticas discretas, las que no, conservarán su nombre de origen, como por ejemplo: la investigación de operaciones, la estadística, la probabilidad y la simulación, pues son más bien híbridas.

A). UNA VARIABLE ES INEXACTA PERO APROXIMADA, o simplemente aproximada, si cada uno de sus valores exactos posibles sólo se podrían conseguir mediante un procedimiento o algoritmo que consista de un número infinito de pasos; pero como NO hay persona o máquina que realice tal infinidad de pasos, entonces, debemos aceptar o resignarnos para cada valor exacto inalcanzable con un valor inexacto pero aproximado, el cual es el resultado de un procedimiento finito o del algoritmo infinito truncado, siendo el error asociado tolerable; que podamos garantizar que es menor que un valor determinado, o mejor aún, que el error pueda minimizarse cada vez que sea necesario o requerido por nuestras exigencias prácticas.

B). UNA VARIABLE ES DISCONTINUA Y DISCRETA, o simplemente es discreta, si todos sus valores son múltiplo de una unidad mínima, llamada grado de aproximación, y por lo tanto, no podemos pensar o justificar que siempre hay o pueda haber dos valores tan cercanos como se quiera o sea necesario, y por tanto NO hay una infinidad no numerable de posibles valores para la variable. Al proponer un modelo que asuma continuidad entre variables que realmente son discretas es incurrir en un abuso que puede ser tolerable o NO.

Las matemáticas discretas son particularmente respetuosas del carácter discreto de las variables. De hecho, así como en la física la mayoría de las variables se asumen continuas, en el ámbito de la computación las variables en su mayoría son discretas, luego las ramas tradicionales o clásicas de las matemáticas es a la física, como las matemáticas discretas es a la computación.

C). UNA VARIABLE ES FINITA, si NO vislumbramos o NO aceptamos que la variable tiene una cantidad interminable valores posibles, y es insostenible el hecho de que exista un subconjunto específico de los valores posibles de la variable contenido propiamente en el conjunto total de los valores posibles de la variable, que tenga tantos valores (en número) como en él (conjunto total), o sea, sólo hay una cantidad definida de valores posibles, habiendo siempre menos valores en cualquier subconjunto contenido propiamente, que los habidos en el conjunto total.

D). UNA VARIABLE ES ALEATORIA, si NO es determinística, (lo cual significa, que sus valores posibles NO son predecibles, aún cuando tengamos el mayor control posible sobre el experimento que los produce, después de haber estudiado usualmente en un corto plazo y frecuentemente a tan sólo una pequeña cantidad de ellos, o más bien, NO hemos podido descubrir: las relaciones entre sus valores y algunos otros mediante las cuales sea posible predecir sus valores posibles y el error asociado a la predicción sea despreciable o tolerable para el logro de la mayoría de los propósitos prácticos asociados). O bien remitirse a la definición matemática de variable aleatoria, como aquella, cuya imagen inversa se comporta de cierta manera, lo cual siendo estrictos, rompe con la concepción común al respecto.

Lo que se hace, desde el punto de vista de las matemáticas, es proponer para cada variable aleatoria un modelo de "regularidad aleatoria", conocido como distribución de probabilidad de la variable, asumiendo un largo plazo o que tenemos una cantidad muy grande de los valores posibles de la variable. Es por ello que disciplinas como la estadística, la probabilidad y la simulación estrechamente relacionadas con el estudio de lo aleatorio, nos permiten decir algo o mucho a través de las distribuciones de probabilidad correspondientes.

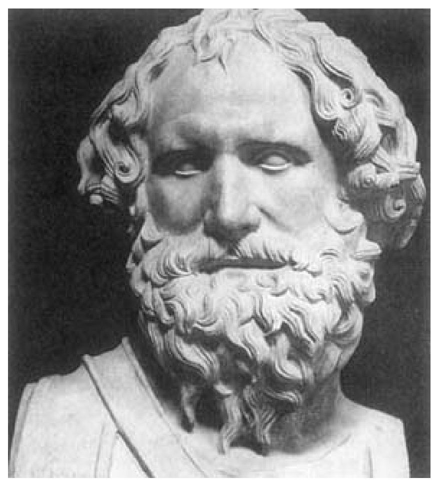
## A manera de conclusión:

Actualmente ya NO es posible seguir pensando que todos los modelos o todas las variables o todo en la realidad o en las matemáticas tiene carácter exacto o continuo o infinito o determinístico, y que por lo tanto, las únicas matemáticas a considerar son las que tratan tales aspectos, tenemos que aceptar que también hay otro tipo de modelos, de variables, otro lado de la realidad que en cierto modo es la negación de las características mencionadas. Esta otra realidad aproximada, discontinua y discreta, finita, aleatoria, caótica, que es más extensa y común de lo que suponíamos, es modelada por las matemáticas DISCRETAS, ESTOCÁSTICAS, NUMÉRICAS, COMPUTACIONALES, RECURSIVAS, la estadística, la probabilidad, la computación y la simulación. Estamos ante el umbral de una nueva era. Al fin los paradigmas de la teoría matemática clásica e ideal, tienen una alternativa de revisión crítica.

# Flotamiento de esferas

*M. C. José Antonio Medina Hernández*
*Departamento de Matemáticas y Física*
*Universidad Autónoma de Aguascalientes*

Arquímides fue un científico griego nacido el año 287 a.C. en Siracusa (Sicilia), asesinado en el mismo lugar en el año 212 a.C. por un soldado romano. Sobre su muerte se narra que al entrar el ejército enemigo a la ciudad donde Arquímides residía, lo encontraron concentrado en un problema geométrico. Al pisar uno de los soldados una figura dibujada en el piso, Arquímides le indicó que no la destruyera. Esta actitud irritó y/o atemorizó al soldado, que le clavó su espada, causando la muerte a uno de los más grandes genios que ha dado la humanidad.



ARQUIMIDES 287-212 a.C.

Arquímides formuló muchos teoremas geométricos, aportando ideas básicas para el cálculo de áreas, que posteriormente fueron formalizadas a través de lo que ahora conocemos como cálculo integral. Fue autor de muchos inventos útiles, como el tornillo o bomba de Arquímides, que se utiliza para subir el agua de lugares bajos a partes más altas. También descubrió el principio de la palanca. Se narra que algunos de sus inventos se utilizaron para defender su ciudad contra los soldados enemigos, sorprendiéndolos con sus novedosas armas, como los espejos concentradores de luz solar, que eran dirigidos contra los barcos enemigos para quemarlos y cegar a los tripulantes.

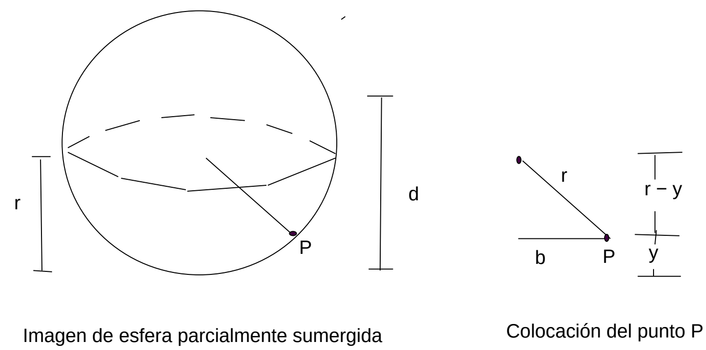



Figura 1: Planteamiento

Otro de sus descubrimientos en Física es el llamado principio de Arquímides, que establece:

"Al sumergirse un cuerpo en un recipiente lleno de un líquido, dicho cuerpo recibirá un empuje hacia arriba igual al peso del líquido que desaloja dicho cuerpo del recipiente."

Utilizando este principio físico, así como el teorema de Pitágoras, el cálculo integral y las técnicas de análisis numérico, se puede resolver el siguiente problema:

PROBLEMA: Suponga que al introducir una esfera de radio $r$ en un líquido, queda parcialmente sumergida. Encuentre la distancia a la que la esfera queda sumergida si su densidad de masa es $\rho$.

SOLUCION. A fin de aclarar las ideas involucradas considere la Figura 1.

La esfera tiene radio $r$ y la cantidad $d$ representa la distancia a la que se encuentra sumergida la esfera. Como primer paso en la solución del problema, se desea calcular el volumen de la parte sumergida de la esfera. Para tal fin se considera un punto P contenido en un círculo máximo de la esfera. Dicho círculo máximo estará contenido en el plano que es perpendicular a la línea de visión cuando se mira la figura de frente. En otras palabras, cuando se interpreta la figura como tridimensional, la línea que une el centro de la esfera con el punto P debe ser perpendicular a la dirección en que apunta un lápiz que se pare sobre el dibujo.

Considere ahora el segundo panel en la Figura 1. El punto superior es el centro de la esfera, por lo que el segmento que une los dos puntos tiene magnitud $r$. Los dos segmentos de recta que aparecen en la parte derecha representen la semi-altura de la esfera, por lo que su suma es $r$. La altura "$y$" mide qué tan alto se encuentra colocado el punto P respecto a la parte más baja de la esfera. El eje "$y$" se considerará que está en la dirección del segmento $d$. Si se considera un círculo cuyo plano es perpendicular a dicho eje, ubicado a la altura "$y$", su área estará dada por $A(y) = \pi b^2$ donde $b$ es la base del triángulo que aparece en la Figura 1. Observe que la base $b$ es función del radio $r$ de la esfera y de la altura "$y$" del punto P. La base $b$ se puede calcular usando el teorema de Pitágoras y está dada por

$$b(r, y) = [r^2 - (r - y)^2]^{1/2}.$$

Si se integran todas las áreas $A(y)$ desde $y = 0$ hasta $y = d$ se obtiene el volumen $V_d$ de la parte sumergida de la esfera

$$V_d = \int_0^d \pi[r^2 - (y - r)^2]dy = \pi d^2(3r - d)/3.$$

Así que la masa del agua desplazada es

$$M_a = \rho_{\text{agua}} V_d = \pi d^2(3r - d)/3 \text{ (en gramos)}$$

pues la densidad del agua es $\rho_{\text{agua}} = 1\text{gr}/\text{cm}^3$.

El peso del agua desalojada será $P_a = gM_a$.

Por otro lado, la masa $M_e$ de la esfera es

$$M_e = \rho V = \rho(4/3)\pi r^3,$$

mientras que le peso de la esfera será $P_e = gM_e$.

Ahora bien, ya que por hipótesis la esfera permanece flotando, ello significa que la esfera es lo suficientemente liviana como para que el peso del agua que desaloja equilibre su peso gravitacional. O sea que $P_a = P_e$, por lo que $M_a = M_e$ y

$$\rho(4/3)\pi r^3 = \pi d^2(3r - d)/3.$$

Esto indica que debe resolverse la ecuación $4\rho r^3 = d^2(3r - d)$, equivalente a

$$d^3 - 3rd^2 + 4\rho r^3 = 0. \tag{1}$$

Obsérvese que la profundidad $d$ depende de los valores que asuman los parámetros $\rho$ y $r$; es decir, $d$ es función de $\rho$ y $r$. La ecuación (1) es cúbica y no existe una fórmula simple que exprese $d$ en función de $\rho$ y $r$.

Se dividirá el estudio de la ecuación (1) en dos casos.

CASO I. $\rho$ o $r$ sean muy pequeños, en cuyo caso se obtiene que

$$d^2(d-3r)=0,$$

lo que indica que $d=0$ o $d=3r$. La solución $d=3r$ no es congruente con la hipótesis de que la esfera flota, por lo que la única solución posible es $d=0$.

El resultado $d=0$ indica que la esfera permanece completamente en la superficie, lo cual puede deberse a dos situaciones:

i) El cuerpo es muy liviano ($\rho=0$) por lo que el peso del agua que desplaza es mucho mayor al peso del cuerpo. Esto se observa cuando se introduce un globo inflado en un recipiente con agua o una bolsa sellada llena de aire.

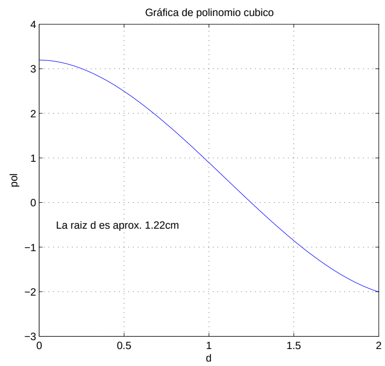
ii) El cuerpo es muy pequeño ($r=0$). Aunque su densidad de masa puede no ser despreciable (como en el caso de los zancudos patinadores) sus dimensiones son tan pequeñas que el peso del cuerpo no es suficiente para vencer la llamada tensión superficial del liquido sobre el que se encuentra. (La tensión superficial es la responsable de que en la superficie de todos los líquidos se forme una especie de pequeña membrana, por la que caminan algunos pequeños insectos sin hundirse).

CASO II. Ni $\rho$ ni $r$ son despreciables, por lo que debe utilizarse alguna técnica para resolver del modo más general posible la ecuación (1). En el siglo XIV el matemático italiano Cardano obtuvo un método para resolver ecuaciones cúbicas polinomiales cuya formula general es larga y engorrosa, necesitándose en ocasiones obtener raíces cúbicas de números complejos. Otra forma de obtener las soluciones de (1), conocidos $\rho$ y $r$, es utilizando métodos numéricos para la búsqueda de raíces de ecuaciones en una variable.

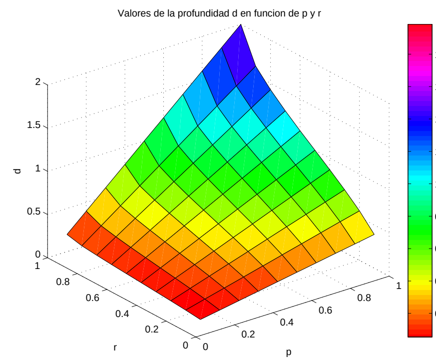
La Figura 2(a) muestra cómo se comporta el polinomio $p(d)=d^3-3rd^2+4\rho r^3$ para valores de $\rho=0.6\text{gr}/\text{cm}^3$ y $r=1.1\text{cm}$. En este caso, la raíz de $p(d)$ que es congruente con el problema es $d=1.22\text{cm}$.

La Figura 2(b) fue obtenida con MATLAB y muestra las raíces $d$ del polinomio $P(d,r,\rho)=d^3-3rd^2+4\rho r^3$ cuando se le asignan distintos valores a los parámetros $r$ y $\rho$.

Como es de esperarse, para valores de $r$ o $\rho$ muy pequeños, la distancia $d$ a la que el cuerpo se sumerge es muy pequeña, pues se cae en el caso I ya analizado. Para valores de $r$ y $\rho$ significativos, la distancia $d$ aumenta de manera semi-lineal conforme crecen dichos parámetros.




(a)




(b)

Figura 2: (a) Comportamiento del polinomio $p(d) = d^3 - 3rd^2 + 4\rho r^3$ para valores de $\rho = 0.6\text{gr/cm}^3$ y $r = 1.1\text{cm}$. (b) Raíces $d$ del polinomio $P(d, r, \rho) = d^3 - 3rd^2 + 4\rho r^3$ cuando se le asignan distintos valores a los parámetros $r$ y $\rho$.

CONCLUSIÓN: La ecuación (1) define una superficie en el espacio que relaciona los valores de $r$, $p$ y $d$. Este ejemplo muestra cómo los conceptos físicos extraídos de la realidad se entrelazan con problemas que aparentemente son “completamente matemáticos”. Este puente entre “realidad” y “abstracción matemática” suele presentarse con mucha frecuencia en la investigación pura y aplicada. Las técnicas numéricas modernas apoyadas fuertemente por la computadora permiten llegar rápidamente a conclusiones mediante herramientas visuales, como las gráficas ya mostradas. En los tiempos de Arquímides no existían computadoras que resolvieran ecuaciones como (1). Obtener un solo valor para $d$ a partir del par $(\rho, r)$ implicaba invertir una gran cantidad de tiempo en cálculos. Trazar la última gráfica requeriría de semanas o meses de esfuerzo. Así que no es insensato decir que si Arquímides y otros genios de la antigüedad vivieran en nuestros días, es posible que, valiéndose de las técnicas modernas, hubieran seguido un camino similar al ya mostrado para resolver en unas pocas horas el problema planteado. Arquímides, con su vocación innata, y tomando el problema anterior como evidencia, seguramente amaría a las matemáticas y a la física; pero también, como muchos de nosotros, amaría la computadora.

# La ética y la carrera de Licenciado en Matemáticas Aplicadas[1]

*C. Salvador Medina R.*
*Departamento de Matemáticas y Física*
*Universidad Autónoma de Aguascalientes*

**Objetivo:**

Reflexionar acerca del comportamiento del hombre como ser humano, como profesionista y como ente social.

**Problema por abordar:**

Interrelación que presentará un Licenciado en Matemáticas Aplicadas (LMA) con:

- La naturaleza
- La sociedad
- Con sí mismo.

**Primer intento de solución:**

Comportamiento ético impecable.

[1]Conferencia dictada en las XI Jornadas de Matemáticas Aplicadas, UAA, 2005

**Preguntas:**

- ¿Qué es la "ética"?
- ¿Quién determina el comportamiento "ético" de una persona?
- ¿Es imprescindible para vivir?
- ¿Por qué mezclarla con un científico como un LMA?

**Veamos:**

**ANTECEDENTES:**

El ser humano es un ente biológico y por tanto, está sujeto a las Leyes de la Naturaleza.

- Evolutivamente, se plantea que los primeros homínidos al descender de los árboles, y como medida de protección de los depredadores, comienzan a agruparse como una estrategia natural para luchar y asegurar su subsistencia, ya que a mayor número de individuos, mayores probabilidades de sobrevivencia (gregarismo).
- Conforme el número de individuos del grupo aumenta, la convivencia entre ellos se complica.
- Se hace obligado introducir normas de convivencia. Esto porque se supone que impera en la naciente sociedad la regla biológica: "Ley del más fuerte". Por tanto, es necesario imponer normas sociales que posibiliten la convivencia y buen funcionamiento del clan, grupo, tribu, etc. (Contratos Sociales de Hobbes y Rosseau).
- Desarrollo de las primeras civilizaciones. Aparecen los códigos morales (Confucio, Hammurabbi, Ptahhotep, El Decálogo, etc.).

**INICIO DE LA ÉTICA:**

- Comienzan -en el individuo- las reflexiones acerca de la felicidad del ser humano (se hace hincapié en las preguntas trascendentes de la vida):
  1. ¿Qué soy? ¿Quién soy?

2. ¿Para qué vivo?
3. ¿De dónde vengo?
4. ¿A dónde voy?
5. ¿Cuál es mi fin?
6. ¿Cómo debo vivir para ser un verdadero ser humano?
7. ¿Qué es lo que importa en la vida?
8. ¿Qué es la muerte?, etc.

(Estas preguntas llevan al famoso: "conócete a ti mismo", de Sócrates, que se supone que nos permite encontrar "el sentido de la existencia").

- Al reflexionar en lo que es el ser humano (o lo que no es el ser humano), se encuentran presentes las contradicciones de la vida humana en cada individuo:

  1. Existenciales:
     *a*) Debilidad Biológica ↔ Fuerza de la inteligencia
     *b*) Advertencia de sí mismo (conciencia, razón e imaginación) ↔ Rompimiento de la armonía.
     *c*) Es parte del mundo ↔ Trasciende la naturaleza.
     *d*) Se da cuenta de sí y de su grandeza ↔ Se da cuenta de su limitación e impotencia para con la muerte.
     *e*) Piensa y con su pensamiento domina ↔ No puede liberarse de lo que piensa ni de su mente.
     *f*) Es corporal y esto lo limita ↔ Necesita del cuerpo para sostener su espíritu.
     *g*) La razón es su fuerza ↔ La razón es su maldición porque lo enfrenta al problema de sus antinomias.
     *h*) Goza ↔ Sufre, se angustia, se fastidia.
     *i*) Es dueño de su vida ↔ No es dueño pleno porque tiene que hacerla y para eso no sirven los modelos de los demás: cada quién es cada cual y cada quién es como es.
     *j*) Va en avance ↔ No puede regresar al estado anterior.
     *k*) Domina ↔ Nunca está contento con las soluciones.

   *l*) Quiere instalarse ↔ La realidad lo impulsa a ser peregrino. Siempre busca algo y no se llena.

2. Históricas:

   *a*) Orgullo y optimismo; esperanza en el futuro ↔ Inquietud y perplejidad en el presente y futuro.

   *b*) Creación maravillosa: ciencia y tecnología ↔ “Conocimiento Ignorante” (pérdida del fin); la tecnología devora al hombre.

   *c*) Sabe mucho sobre la naturaleza, sobre el ser biológico y psicológico del hombre ↔ Ignora las respuestas a los problemas más importantes y fundamentales: ¿Quién soy?, ¿A dónde voy?, etc.

   *d*) Cada vez tiene mejores reglamentos y leyes ↔ Vive en un relativismo moral y ético. No sabe distinguir lo bueno de lo malo.

En suma: Tres antinomias existenciales que el hombre no puede evitar:

- Vida ↔ Muerte
- Portador de deseos infinitos ↔ Breve lapso de vida para realizarlos
- Solo ↔ Con los demás[2]

Por otra parte, y siguiendo con algunos antecedentes históricos de gran importancia, se debe mencionar a:

- Platón: el bien es un elemento esencial de la realidad. El mal no existe en sí mismo, sino como reflejo imperfecto de lo real, que es el bien. Alma humana: el intelecto, la voluntad y la emoción, y cada uno de ellos cuales posee una virtud específica en la persona buena y juega un papel específico. Virtud del intelecto = sabiduría, o el conocimiento de los fines de la vida; voluntad = valor (la capacidad de actuar), y emociones = templanza (o autocontrol); virtud última = justicia = relación armoniosa entre todas las demás (virtudes) cuando cada parte del alma cumple su tarea apropiada y guarda el lugar que le corresponde.

[2]Las antinomias han sido tomadas de las notas del Fil. Amador Gutiérrez G. para el curso: Formación de Valores.

- Aristóteles: hay tres clases de felicidad: (a) vida de placeres y diversiones; (b) vivir como un ciudadano libre y responsable, y (c) la vida donde se filosofa e investiga.[3] Estas tres condiciones coexisten simultáneamente para que el ser humano viva feliz. Además, en la relación interpersonal, no se debe ser ni cobarde ni temerario, sino valientes. Asimismo, no se debe ser muy tacaño ni muy pródigo, sino más bien, generoso. Para ser feliz, se debe buscar el justo medio.

- ÉTICA CRISTIANA.- Aparece el concepto religioso de lo bueno en el pensamiento occidental. La conducta ética descansa en las reglas de oro: "Trata a tu prójimo como quieres que te traten" y "Amarás a Dios sobre todas las cosas". El cristianismo inicial entroniza como virtudes: el ascetismo, el martirio, la fe, la misericordia, el perdón y el amor (no erótico).

  1. San Agustín: no acepta el maniqueísmo.

  2. Tomás de Aquino: admite la verdad del sentido de la experiencia pero mantiene que ésta completa la verdad de la fe.

  ***Aparece pues el concepto de: ética (del griego ethika, de ethos, 'comportamiento', 'costumbre'), que no es más que los principios o pautas de la conducta humana y por extensión, el estudio de esos principios a veces llamado filosofía moral.***[4] ***En suma, la ética es una rama de la filosofía que se considera como una ciencia normativa, y se ocupa de las normas de la conducta humana.***

  (De manera simple: la ética es el esfuerzo por teorizar y explicar las normas de comportamiento. Diríamos que es el conjunto de todas las morales). La MORAL (del Latín *mores* = costumbre) nos permite convivir. Decimos que es el conjunto de normas prácticas que se tienen en todos los grupos humanos para regir las cosas buenas o malas (es la manera en que vivimos).

  La ética se sustenta en la conciencia y en los valores, siendo entonces imprescindible para vivir conjuntamente como un grupo de individuos formando una sociedad (valores afines).

---

[3]Recordemos que Aristóteles consideraba que el ser humano era la "forma" de tres almas conjuntas: alma vegetal, alma animal y alma racional; por tanto, para ser feliz se deben potenciar todas sus capacidades y habilidades

[4]Definición tomada de la Enciclopedia Microsoft Encarta, 2000.

- Conciencia (de *syn*=con, *oida*=saber, *conscientia* = saber compartido). Significa, en sus orígenes: ser testigo o ciencia ocular. Resulta ser entonces el saber consigo mismo, o sea, la relación del hombre consigo mismo. Es un saber reflexivo. La conciencia es ese algo que nos regaña, nos castiga y nos tiene en vigilia cuando sabemos que no estamos siendo congruentes con nosotros mismos ni hemos actuado como debimos; ese algo que hace que nos sintamos tan felices cuando nos comportamos como debe ser; ese algo que nos indica que somos únicos e irrepetibles en el mapa social, y que nos hace ser -o al menos darnos cuenta que somos- personas; ese algo que nos sirve para platicar con nosotros mismos cuando estamos solos y, a fin de cuentas, ese algo que no sabemos cómo, pero impide que caigamos en el auto-engaño, entre muchas otras peculiaridades. La conciencia es el fondo insobornable del ser humano, y puede ser juez, acusador y testigo, simultáneamente. Puede estar equivocada, pero hasta en esas condiciones es coherente consigo misma. La conciencia puede ser de tipo psicológica (que es cuando uno se da cuenta de sí mismo) y de tipo moral (que es la que permite la autoidentificación y otorga, por así decirlo, la responsabilidad personal). La conciencia es objetiva, compleja y evolutiva, además de ser una vivencia individual. Así, abriendo la conciencia se abren las posibilidades de vida.

- Los valores provienen de lo que es el valor, que es aquél bien que se valora. La ciencia que los estudia se denomina axiología (del griego *axios*, 'lo que es valioso o estimable', y *logos*, 'ciencia'), teoría del valor o de lo que se considera valioso. La axiología no sólo trata de los valores positivos, sino también de los valores negativos, analizando los principios que permiten considerar que algo es o no valioso, y considerando los fundamentos de tal juicio.[5]

- La ética propone pues un comportamiento moralmente correcto, de tal suerte que nuestra conciencia esté en paz y no violentemos intempestivamente los valores que subyacen en nuestra sociedad.

[5] Definición tomada de la Enciclopedia Microsoft Encarta, 2000.

## INTERRELACIÓN DE UN LMA CON LA NATURALEZA

En lo que respecta al alumno de LMA, es evidente que antes que ser un educando es una persona, y tiene valores que se le han inculcado en su familia y/o sociedad. Así, para saber cómo educar (que no sólo instruir) a los futuros profesionistas, quizá deberíamos reflexionar que en nuestro trabajo como profesores -y como padres- depende de qué entendamos por educar. Veamos.

## VALORAR Y EDUCAR PARA UN COMPORTAMIENTO ÉTICO[6]

- Hablar de educación es hablar de valores (aun cuando valorar tiene la misma raíz que evaluar, y es afín con los vocablos apreciar, reconocer, aceptar. Por tanto, valorar es dar valor a algo o a alguien).
- Los valores están presentes en la realidad humana. Hablamos de valores humanos (convicciones), valores de una organización (su cultura), de una familia (su estilo de vida) y de un país (tradiciones e identidad).
- Los valores en las carreras universitarias están íntimamente relacionados con:

    1. La ciencia (cuyo valor es la verdad, y se desea saber pensar y saber los por qué de la realidad).
    2. La tecnología (cuyo valor es la utilidad y se desea saber cómo hacer y utilizar el conocimiento) y,
    3. La dimensión de los valores, cuyo "valor" es el deber ser (es decir, saber para qué se sabe, lo que nos lleva a ser mejores).

    Pero educar en los valores también es:

    1. Conseguir que cada estudiante encuentre su camino.
    2. Enseñar para la vida y entender que la existencia tiene un sentido.
    3. Ayudar a que los demás se descubran a sí mismos.
    4. Ayudar a resolver los problemas de cada día, sin que estos ocasionen frustración, y

[6]Tomado de las notas del Fil. Amador Gutiérrez G. para el curso: Formación de Valores. Proviene del "Resumen de los Valores y la Educación", de Juan Gerardo Garza T.

5. Sentar las bases para proseguir con el proceso personal del autocrecimiento.

- Los valores son pues, nuestra autodefinición como personas y guía de nuestras decisiones, que configura la naturaleza misma de nuestro ser.
- Para enseñar los valores, se debe ver si los valores se pueden enseñar, si se deben enseñar y cómo se hará para enseñarlos. **Esto nos conduce al sentido ético en los seres humanos (esto debe ser recalcado, ya que la universidad permite potenciar conocimientos y habilidades de las personas, empero, si no se tiene un conocimiento ético, aquellos pueden tener carácter destructivo).**
- *Podemos decir entonces que educar es preparar para la vida, comprender el mundo y comprenderse a sí mismo. La educación es enseñar una ética frente a la existencia, para que con sabiduría se aprenda a bien tener, a bien hacer, a bien vivir y a bien ser. La educación permite crear las condiciones para que quien aprende pueda desarrollar todo su potencial como ser humano, además de que ayuda a los demás a conocer y a comprender, a creer y a dudar, a recibir y a aportar, a informarse, pero sobre todo a formarse como seres humanos.*
- Ahora bien, el comportamiento ético de un individuo se puede dar por dos vías:
  1. La ética autoritaria: dentro de un marco social, la autoridad determina qué es bueno para el hombre mediante el miedo. La norma está sobre el individuo, y la autoridad es eterna. Impone la desigualdad entre los hombres.
  2. La ética humanista o racional: cuando rige la razón, se espera que la conducta moral resulte del pensamiento racional (es decir, el hombre determina lo que es bueno o malo para él). El hombre está sobre la norma y la autoridad es temporal. Busca la igualdad entre los hombres.

***Así pues, para mí es claro que, para que una persona tenga un comportamiento ético, debe tener un código de ética personal, que -según yo- está sustentado en:***

***a. Visión-misión de la vida***

***b. Honestidad***
***c. Equilibrio***
***d. Respeto***
***e. Responsabilidad, y***
***f. Amor a la verdad***

- Así pues, un LMA al tener en claro los valores que imperan en su sociedad, los valores propios de su área de estudio y sus propia escala de valores (código de ética), además del ejercicio consciente de su profesión, deberá verse como un ser vivo más, inmerso en el medio natural con un comportamiento regido por la ética, propugnando la preservación del medio ambiente y respetando el habitat de las demás especies, al igual que a sus semejantes, considerando que también tienen derecho a la existencia.

- En lo relativo a la interacción del LMA con su sociedad, deberá ser una persona honesta que no se deje arrostrar por el vehemente deseo del triunfo fácil y del éxito a costa de lo que sea -inclusive a costa del engaño (o autoengaño)- pues no debe perder de vista que lo que haga o deje de hacer impactará positiva (o negativamente) su entorno (en primera instancia, el más cercano a su persona). Soy de la idea de que un científico tiene una gran responsabilidad moral a la hora de hacer público un descubrimiento o investigación que pudiera ocasionar daños a su entorno y, aun cuando es libre y está sujeto al ejercicio de su propia voluntad, debe darse un tiempo para reflexionar los posibles efectos de sus acciones (recordemos a Nóbel, a Einstein, a Fermi, etc). Precisando: debe tener en mente lo que va a hacer, para después no sufrir recriminaciones de su conciencia (digámoslo coloquialmente: una cruda moral).

- Y para un LMA -lo mismo que para cualquier individuo-, debe ser natural o evidente que lo mejor es estar en paz consigo mismo, asumiendo un comportamiento honesto y vertical (o ético), pues esto es realmente lo más importante. Recordemos que antes que ser científico o profesionista es un ser humano, y que se puede engañar a todo mundo. . . excepto uno mismo. Por ende, si asume un comportamiento ético, esto le hará disfrutar la vida, alcanzando plena libertad en sus actos e intentando llegar a la máxima aspiración de todo ser humano: la felicidad.

## Como Conclusión:

- El comportamiento ético de un LMA debe estar presente siempre. Debe regirse por un código de ética que guíe sus actos como profesionista, como ente social y como ente individual, propugnando siempre el auto-desarrollo y el de su comunidad, promoviendo con sus conocimientos y sus actos la verdad científica y los más elevados valores del quehacer humano; consciente de que su existencia es necesaria dentro del policromo ambiente social en el que vive.

- Y todos en conjunto, debemos luchar plenamente convencidos de que, modificando nuestros patrones de conducta y actuando con integridad plena, podemos lograr un mundo mejor; debemos participar también en fomentar principios y valores, y hacer saber a los alumnos (en este caso particular, de LMA) que ellos tienen la posibilidad de superarse y de ser mejores, de asumir un comportamiento honesto que les permita ver que el mundo es muy hermoso y que vale la pena vivirlo y rescatarlo del sitio donde lo estamos llevando, y que entre todos debemos evitar su aniquilación, pues si bien no somos enteramente responsables de ello, el hecho es que lo tenemos ahí, enfrente: supino, doliéndose y agonizando lentamente; y nosotros, las más de las veces, con nuestro desmedido orgullo de sabernos seres pensantes y con voluntad, no hacemos nada o, en su defecto, hacemos como que hacemos, y sólo lo dejamos morir, sin pensar que estamos siendo los causantes de un asesinato y de un suicidio colectivo. Parafraseando a Gabriel García Márquez, me atrevo a decir que, si el ser humano no cambia -y para bien-, seremos una especie en vías de extinción que no merece una segunda oportunidad sobre la tierra.

Muchas gracias

Mayo de 2005

# El Teorema Pi y la modelación

*Luis Quintanar Medina*
*Instituto Superior de Matemática (INSUMA)*
*Aguascalientes, Ags.*

## Magnitudes, unidades y dimensiones

Para describir los fenómenos que nos rodean es necesario determinar primero las magnitudes que pueden ser útiles, aquéllas que tienen una influencia primordial en su desarrollo; después nos interesa conocer relaciones entre ellas o leyes.

Tales relaciones pueden obtenerse directamente de forma experimental o partiendo de alguna teoría conocida; otra forma consiste en establecer una relación tentativa (que después habrá de comprobarse o desecharse con ayuda del experimento) usando el llamado Teorema Pi de Buckingham, que es el caso que nos interesa; este tópico pertenece al análisis dimensional, con el cual se logra completar un análisis matemático de los problemas que surgen en la realidad y reducir costos de experimentación; esta técnica es muy útil en problemas que surgen en mecánica, en particular la de fluidos.

Las magnitudes como la velocidad, densidad, etc. se expresan en ciertas *unidades*, como metros por segundo $\frac{m}{s}$, kilogramo por metro cúbico $\frac{kg}{m^3}$, etc.

Por otra parte, en mecánica tenemos tres *dimensiones* importantes: longitud ($L$), masa ($M$) y tiempo ($T$), que se expresan en unidades como metro, kilogramo y segundo, respectivamente; una magnitud física como la velocidad se puede expresar en metros por segundo ($\frac{m}{s}$) y en dimensiones como $\frac{L}{T}$ o $L^1T^{-1}$.

Representaremos las dimensiones de una magnitud con paréntesis cuadrados [ ], por ejemplo, si usamos la letra $v$ para referirnos a la magnitud velocidad, $[v]$=$L^1T^{-1}$; en general, si tenemos n magnitudes $q_i$, se pueden escribir sus dimensiones como $[q_i]$=$D_1^{a_{1i}}D_2^{a_{2i}}\ldots,D_m^{a_{mi}}$, $i = 1, 2, \ldots, n.$, en donde los

$D_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ representan alguna dimensión, como $L$, $M$ o $T$; en esta notación $[v] = L^1 T^{-1} M^0$.

Si $[q_i] = 1$ se dice que $q_i$ es adimensional; esto supone que los $a_{ij} = 0$ $\forall i, j$.

# Independencia de las unidades

Una ley será una relación entre las magnitudes que describen un fenómeno; por ejemplo, la ley entre las magnitudes velocidad ($v$), aceleración (para el caso de aceleración, $a$, constante) y tiempo ($t$) del movimiento rectilíneo de un objeto considerado como un punto es

$$v = v_0 + at,$$

en donde $v_0$ representa la velocidad inicial.

La expresión anterior se puede escribir como

$$v - v_0 - at = 0$$

o, en forma más general, como

$$f(v, v_{0,}a, t) = 0.$$

Consideremos lo siguiente: si sabemos que se cumple la ley $v = v_0 + at$ para cuando la velocidad se está expresando en $\frac{m}{s}$, la aceleración en $\frac{m}{s^2}$ y el tiempo en segundos, ¿se cumplirá la misma ley entre estas magnitudes si la velocidad, la aceleración y el tiempo se expresaran en otras unidades, digamos, respectivamente, $\frac{cm}{s}$, $\frac{cm}{s^2}$, $s$?

Si es así, se dice que la ley es *libre de unidades* (unit free):

La ley física $f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ es libre de unidades si para todos los reales $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\ldots$, $\lambda_m$ con $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, tenemos

$$f(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \ldots, \overline{q}_n) = 0 \Leftrightarrow f(q_1, q_{2,} \ldots, q_n) = 0 \text{ con } \overline{q}_j = \lambda_1^{b_q} \lambda_2^{b_2} \ldots, \lambda_m^{b_m} q_j.$$

# El Teorema Pi

El teorema Pi dice lo siguiente:

1. Sea la ley física $f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$, libre de unidades, en donde $q_1$, $q_2$, $\ldots$, $q_n$ son magnitudes dimensionales.

2. Sea $L_{1,}L_2, \ldots, L_m$, $m < n$, dimensiones básicas y

$$[q_i] = L_1^{a_{1i}} L_2^{a_{2i}} \ldots, L_m^{a_{mi}},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots.. & \\ . & \ldots.. & \\ . & \ldots.. & \\ . & \ldots.. & \\ a_{m1} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es una matriz $mxn$ de rango $r$.

*ENTONCES*

a) Existen $n - r$ cantidades adimensionales $\Pi_{1,}\Pi_{2,} \ldots, \Pi_{n-r}$ independientes que pueden formarse con las $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

b) La ley física $f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$ es equivalente a $F(\Pi_{1,}\Pi_{2,} \ldots, \Pi_{n-r}) = 0$.

En esencia, el teorema expresa que es posible describir un fenómeno con una cantidad de parámetros *adimensionales* $(\Pi_1, \Pi_{2,} \ldots, \Pi_{n-r})$ que es menor que la cantidad de parámetros *dimensionales* involucrados $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

# Ejemplo

Consideremos el péndulo matemático que realiza oscilaciones pequeñas y que tiene longitud $l$, periodo $p$ y sometido a la aceleración de la gravedad $g$; es importante señalar que para usar el análisis dimensional debe tenerse una idea lo más clara posible de las magnitudes fundamentales involucradas en el fenómeno, en este caso, estamos suponiendo que el fenómeno está determinado por tres magnitudes dimensionales: $p, l, g$ .

Supongamos que existe la ley libre de unidades

$$f(p, l, g) = 0;$$

Ya que hay tres magnitudes dimensionales tendremos $n = 3$.

Para las dimensiones tenemos, puesto que las unidades de $p$ son, digamos $\frac{1}{s}$, las de $l$ metros y las de la aceleración de la gravedad $\frac{m}{s^2}$:

$$\begin{aligned} [p] &= T^{-1}L^0 \\ [l] &= \ T^0L^1 \\ [g] &= T^{-2}L^1 \end{aligned}$$

y entonces $m = 2$ (dos dimensiones involucradas).

Con lo anterior tenemos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que es de rango $r = 2$; por tanto, tenemos $n - r = 1$ magnitudes adimensionales que se forman con $p, l, g$ , digamos, $\Pi_1$.

Además, son equivalentes las leyes $f(p, l, g) = 0$ y $F(\Pi_1) = 0$.

¿Cómo obtener $\Pi_1$?

Se construye con las tres magnitudes que determinan al sistema, de la siguiente manera:

$\Pi_1 = p^x l^y g^z$, imponiéndole la condición de adimensionalidad $[\Pi_1] = 1$; entonces $[\Pi_1] = T^{x-2z}L^{y+z}$ debe ser la unidad, lo que nos da el sistema de ecuaciones

$$x - 2z = 0 \quad \text{y} \quad y + z = 0.$$

Observen que este sistema se puede obtener de $Av = 0$, considerando al vector $v = (x, y, z)$.

Una solución del sistema es $z = 1/2$, $y = -1/2$, $x = 1$.

Entonces

$$\Pi_1 = p^1 l^{-1/2} g^{1/2} = p\sqrt{\frac{g}{l}}$$

y además, la ley $F(p\sqrt{\frac{g}{l}}) = 0$ es equivalente a $f(p, l, g) = 0$ que es la ley para las magnitudes dimensionales.

Si se propone una función lineal $F$ en $\Pi_1$:

$$a\Pi_1 + b,$$

donde $a, b$ son constantes entonces $\Pi_1 = c$, con $c$ constante, es decir

$$p = c\sqrt{\tfrac{l}{g}};$$

Esta expresión, obtenida usando el análisis dimensional, debe ser constatada o eliminada vía la experimentación (la relación real es $p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$).

# La Modelación

El conocer que ciertas leyes entre magnitudes dimensionales se cumplen para otras adimensionales es muy útil en la modelación; un *prototipo* es un objeto que se desea estudiar mientras que un *modelo* lo representa a una escala menor o mayor, por ejemplo una maqueta de un edificio, un barco de plástico o un avión de metal son modelos de sus correspondientes objetos reales.

Si se ha establecido que una ley entre magnitudes dimensionales es equivalente a una entre magnitudes adimensionales e involucra a la magnitud adimensional $\Pi = \frac{h}{a}$ en donde $h$ y $a$ se dan en metros, también se cumple para $h$ y $a$ dados en centímetros, es decir, para un objeto semejante pero de menores dimensiones; se habla entonces de objetos similares.

La *similaridad* del prototipo y del modelo debe darse a varios niveles: *geométrico*, *cinemático* y *dinámico*, es decir, en cuanto a *su forma* las estructuras deben ser similares, lo mismo se debe cumplir para *las trayectorias* que describan prototipo y modelo, si realizan movimientos, y para *las fuerzas* involucradas, que deben ser proporcionales; así, si la segunda ley de Newton se cumple para el prototipo, se cumplirá también para el modelo y es posible entonces experimentar con éste para conocer lo que pudiera pasarle realmente al prototipo; cuando hay similitud geométrica, cinemática y dinámica se habla de *similitud dinámica*; por ejemplo en el caso de fluidos esta se da a través de las magnitudes adimensionales conocidas como número de Reynolds (razón de fuerzas inerciales y viscosas), de Froude (que expresa la relación entre fuerzas de inercia y gravedad), de Weber (razón de fuerzas de inercia y tensión superficial) y de Mach (razón de fuerzas inerciales y elásticas), que deben ser las mismas para modelo y prototipo.

Bibliogrfía

-Brand L. The Pi Theoren of Dimensional Analysis.

-Fernández B. Mecánica de fluidos. Alfaomega Grupo Editorial, México D.F, 1999.

-Langhaar H. Dimensional Analysis and Theory of Models. John Wiley & Sons. London, 1962

-Logan J. Applied Mathematics. John Wiley & Sons, USA, 1987

-Stretter V. y Wylie B. Mecánica de los fluidos.McGraw-Hill Interamericana, México, 1988.

# El cometa Oterma

*Dra. Luz Vianey Vela Arévalo*
*Departamento de Matemáticas y Física*
*Universidad Autónoma de Aguascalientes*

El cometa 39P Oterma ha sido uno de los recientes visitantes a nuestro Sistema Solar. Su órbita tan particular ha dado lugar a numerosos estudios que en particular han mostrado el potencial de los métodos cualitativos de los sistemas dinámicos. En el presente trabajo, deseamos dar un bosquejo de estos métodos y herramientas matemáticas que de alguna manera explican el comportamiento de los cometas como cuerpos celestes, y además pemiten la creación de nuevos problemas y soluciones que se han aplicado ya en diversas misiones espaciales.

Liisi Oterma (1915-2001) fue una astrónoma finlandesa, y la primera mujer en obtener el grado de Ph.D. (Doctor en Filosofía, por sus siglas en inglés) en astronomía en su país. Descubrió varios cometas periódicos, entre ellos el que lleva su nombre, el cometa Oterma [1].

Un cometa es un pequeño objeto astronómico similar a un asteroide, pero compuesto en su mayoría por hielo. Los cometas se mueven debido principalmente a su atracción por el Sol. Isaac Newton (1642-1727) ya sabía que la atracción gravitacional del Sol ocasiona que los cuerpos se muevan en órbitas parabólicas, hiperbólicas y elípticas (de las cuales las órbitas circulares son un caso particular). Los cometas periódicos (que repiten su movimiento) generalmente se mueven en órbitas altamente elípticas, con su afelio (punto más distante al Sol) muchas veces más distante que la órbita de Plutón. Así que un cometa es una “bola de hielo sucio”, que se compone de bióxido de carbón congelado, metano y agua, mezclados con polvo y varios minerales. Curiosamente, los cometas son cuerpos congelados, y no los objetos candentes que hemos visto en películas.

El cometa que nos ocupa aquí es el cometa Oterma, que fue observado en los alrededores del Sistema Solar durante el Siglo XX. Más precisamente, el cometa Oterma se observó en 1910 en una trayectoria cercana a la órbita de Júpiter; en particular se observó que el cometa estaba siendo atraído por la masiva fuerza gravitacional de Júpiter. Entre los años de 1910 y 1980, el cometa Oterma produjo una trajectoria muy curiosa: pasó muy cerca de Júpiter hasta que cruzó la órbita de Jupiter, se quedó en el interior del Sistema Solar por 2 años Júpiter, durante los cuales Oterma dio tres revoluciones alrededor del Sol, y volvió a cruzar la órbita de Júpiter, ahora hacia el exterior, para alejarse del Sistema Solar nuevamente [2].

El cometa Oterma tiene un movimiento determinado principalmente por su atracción gravitacional por el Sol y por Júpiter. Si consideramos únicamente la atracción por el Sol, la trayectoria de Oterma tendría que ser una de las establecidas por Newton: una elipse, una parábola o una hipérbola. El modelo matemático que describe esta situación es el Problema restringido de tres cuerpos.

El problema restringido, plano y circular de tres cuerpos consiste en describir el movimiento *en el plano* de un objeto pequeño (un cometa) que es atraído por la fuerza gravitacional de dos cuerpos llamados *primarios* (el Sol y Júpiter) que se mueven en órbitas *circulares* alrededor de su centro de masa. Esta situación se puede describir con un modelo matemático en el que la principal suposición es que la masa del cometa es suficientemente pequeña para no afectar el movimiento de los dos primarios; de ahí el nombre de problema *restringido*.

Para determinar el modelo del problema restringido, plano y circular de tres cuerpos, usaremos un sistema coordenado en el plano $(x, y)$ en el que la distancia entre los cuerpos primarios es 1, y las masas están normalizadas para que la masa total del sistema sea 1. En este caso, la masa del primario Júpiter está dada por

$$\mu = \frac{m_J}{m_J + m_S} = 0.0009537,$$

y la masa del Sol es pues $1 - \mu$. Debido a que los primarios Sol y Júpiter se mueven alrededor de su centro de masa, se coloca el origen en dicho centro de masa, luego la posición inicial de Júpiter es $1 - \mu$ y la del Sol es $-\mu$. Esta es la situación representada en la Figura 1. Aún más, como los primarios se mueven en órbitas circulares a velocidad angular constante, se normaliza esta velocidad angular igual a 1, y se toma un sistema de coordenadas rotatorio; es decir, los ejes coordenados $(x, y)$ rotan a la misma velocidad angular que los primarios. En este sistema de coordenadas rotatorio, los primarios se ven

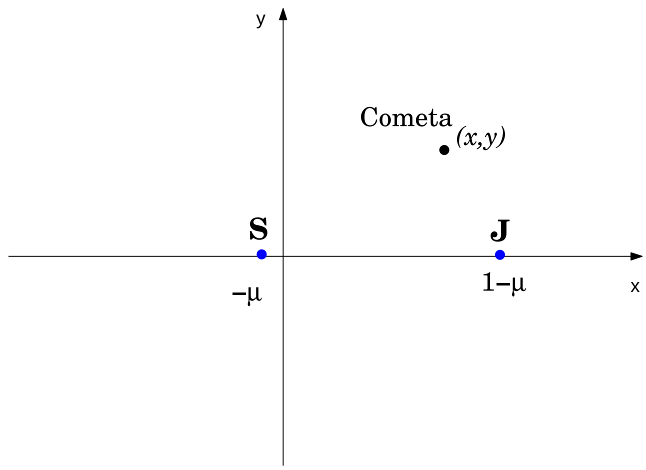



Figura 1: Sistema de coordenadas rotatorio del problema restringido, plano y circular de tres cuerpos. S es la posición del Sol, J es la posición de Júpiter.

fijos.

Para determinar las ecuaciones de movimiento del cometa, es necesario usar la segunda Ley de Newton (fuerza = masa x aceleración) y la Ley de gravitación universal (la fuerza de gravitación entre dos cuerpos es igual al producto de las masas entre el cuadrado de la distancia que los separa). Estas leyes se aplican para determinar las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento en ambas direcciones $x$ y $y$. Se requieren algunos cálculos sencillos para introducir el sistema de coordenadas rotatorio, que consisten en una transformación de coordenadas del tipo $(X, Y) = (x\cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y\cos t)$. Después de hacer esto, las ecuaciones de movimiento del cometa en el problema restringido, plano y circular de tres cuerpos son:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{(1-\mu)\,(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu\,(x-1+\mu)}{r_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{(1-\mu)\,y}{r_1^3} - \frac{\mu\,y}{r_2^3}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ y $r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}$ son las respectivas distancias del cometa a el Sol y a Júpiter. En esta notación, el punto $(\dot{})$ representa derivación con respecto al tiempo; así $\dot{x} = dx/dt$ y $\ddot{x} = d^2x/dt^2$.

Estas ecuaciones se pueden integrar numéricamente para obtener la trayectoria de una condición inicial dada. Sin embargo, resulta imposible adentrarse en la infinidad de trayectorias a estudiar de esta manera. El problema restringido plano y circular de tres cuerpos ha sido estudiado extensivamente, siendo Henri Poincaré (1854-1912) quien recibió en 1889 el premio del Rey de Suecia y Noruega que había sido ofrecido por la solución del problema de tres cuerpos en series de potencias. De hecho, Poincaré no pudo encontrar tal solución, pero sus contribuciones en este problema tenían una gran cantidad de ideas importantes que contribuyeron al desarrollo de la mecánica, de los sistemas dinámicos, y de muchas otras disciplinas matemáticas [3].

Un método de estudio de este problema consiste en calcular la *frecuencia instantánea* asociada a las trayectorias [4]. Este método, llamado *análisis de tiempos-frecuencias basado en ondeletas*, consiste en calcular la transformada de ondeletas (*wavelets* en inglés) de las trayectorias, para extraer la frecuencia instantánea de la órbita. La frecuencia instantánea se puede entender como la razón de cambio (o velocidad) de la fase de oscilación de la órbita. Detalles de la definición de frecuencia instantánea, la transformada de ondeletas, y el análisis de tiempos-frecuencias puede encontrarse en [4].

Un ejemplo de aplicación del análisis de tiempos-frecuencias al problema restringido de tres cuerpos se ilustra en la Figura 2. Se calculó numéricamente una trayectoria, que está representada en el primer panel en azul, con condición inicial representada por el punto rojo. La órbita de Júpiter está representada en verde, y el Sol se encuentra prácticamente en el origen. La trayectoria del cometa comienza en la región exterior del Sistema Solar. Despues de un cierto tiempo el cometa cruza la órbita de Júpiter y se mantiene dando revoluciones alrededor del Sol en el interior del Sistema Solar, para después nuevamente cruzar la órbita de Júpiter hacia el exterior. Esta es una trayectoria similar, en términos generales, a la del cometa Oterma.

En el segundo panel de la Figura 2, se representa la frecuencia instantánea de la trayectoria. Recordar que la frecuencia de Júpiter es 1 (en nuestro sistema normalizado de coordenadas), luego el cometa inicialmente tiene una frecuencia menor a la de Júpiter, lo cual concuerda con que el cometa se encuentra en la región exterior del Sistema Solar. Cuando el cometa cruza la órbita de Júpiter hacia la región interior, la frecuencia se incrementa hasta ser mayor que 1. Cuando el cometa regresa a la región exterior, su frecuencia vuelve a ser menor que 1. Así pues, la frecuencia instantánea del cometa describe claramente la trayectoria del cometa: si es que está en la región exterior o interior, cuándo cruza hacia la región interior, cuánto tiempo se

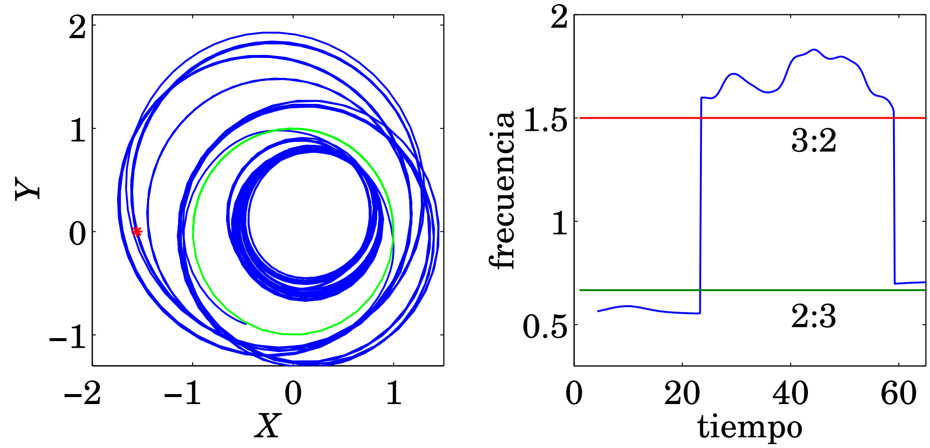



Figura 2: Trayectoria del cometa en la que hay una transición del exterior de la orbita de Júpiter (verde) al interior, y viceversa. La frecuencia instantánea indica que se visitan las resonancias zonas de resonancia 2:3 y 3:2. Las condiciones iniciales son $x^0 = -1.556$, $v_x^0 = 0.05$, $y^0 = 0$, $E = -1.515$.

mantiene en el interior, etc. La frecuencia instantánea además nos da información sobre las resonancias. Si el cometa revoluciona dos veces alrededor del Sol mientras Júpiter lo hace tres veces, decimos que existe una resonancia 2:3. Análogamente, si el cometa da tres revoluciones mientras que Júpiter da dos, decimos que hay una resonancia 3:2. En el segundo panel, estas resonancias están marcadas con líneas. Vemos que en esta trayectoria, el cometa está cerca de la resonancia 2:3, transiciona a la región interior y cruza la resonancia 3:2, y al regresar al exterior está nuevamente cerca de la resonancia 2:3. Este hecho se conoce como *transición de resonancias*, y se ha observado que tiene consecuencias importantes en el transporte de masa entre el exterior e interior del Sistema Solar [4].

## Más información

Hemos visto que el estudio de la trayectoria del cometa Oterma conlleva el desarrollo de nuevas técnicas matemáticas y su aplicación en modelos relativamente simples. Si el lector quiere saber más sobre cometas, una fuente inagotable es por supuesto la internet. Por ejemplo, consulte en `http://cfa-www.harvard.edu/iau/lists/CometLists.html`

las listas de cometas que se han acercado más a la Tierra, los últimos que se han observado, los que se observarán en los próximos años, etc., así como animaciones de los muchos cometas observables.

El proyecto Génesis (Genesis Mission) consistió en enviar un vehículo espacial a una trayectoria alrededor del Sol a coleccionar muestras de viento solar. Se llevó a cabo de agosto de 2001 a septiembre de 2004, y una cápsula conteniendo las muestras regresó a la Tierra y debió ser capturada durante el proceso de aterrizaje por un helicóptero en algún lugar del estado de Utah, E.U. Más información se puede encontrar en

`http://genesismission.jpl.nasa.gov.`

El proyecto Génesis tuvo inspiración en el estudio del problema restringido de tres cuerpos, puesto que la trayectoria se calculó tomando como modelo lo que se conoce como órbita Halo, que revoluciona alrededor del Sol, y que tiene como principal característica que existe una "súper carretera" desde un punto cercano a la Tierra para llegar a ella. Esta súper carretera es un objeto matemático llamado *variedad estable* de la órbita Halo. Como se ve, algunos objetos matemáticos viven literalmente en el cielo.

## Bibliografía

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Liisi_Oterma`

[2] W. S. Koon, *et al.*, Chaos **10**, 427, (2000).

[3] C. L. Siegel y J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, (1971).

[4] L. V. Vela-Arevalo y J. E. Marsden, Class. Quantum. Grav. **21**, S351 (2004).

# Continuidad de las funciones convexas

*Dr. José Villa Morales*
*Departamento de Matemáticas y Física*
*Universidad Autónoma de Aguascalientes*

## Resumen

El propósito del presente trabajo es demostrar que una función convexa es continua. Este hecho es bastante conocido y el mérito, quizá, es demostrar la afirmación anterior de la manera más fácil posible.

## Introducción

En los primeros semestres de la Licenciatura es, comúnmente, introducido el concepto de función convexa, el autor cree que el presente trabajo puede ayudar a la mejor comprensión de este concepto.

A continuación recordaremos que es una función convexa. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se llama *convexa* en $[a, b]$ si para cuales quiera $u, v \in [a, b]$, con $u < v$, se cumple que la pendiente de la recta de $(u, f(u))$ a $(r, f(r))$ es menor que la pendiente de la recta de $(u, f(u))$ a $(v, f(v))$, es decir

$$\frac{f(r) - f(u)}{r - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}, \tag{1}$$

donde $r$ es un punto arbitrario de $(u, v)$. O de manera equivalente, $f$ es convexa si

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(r)}{v - r}. \tag{2}$$

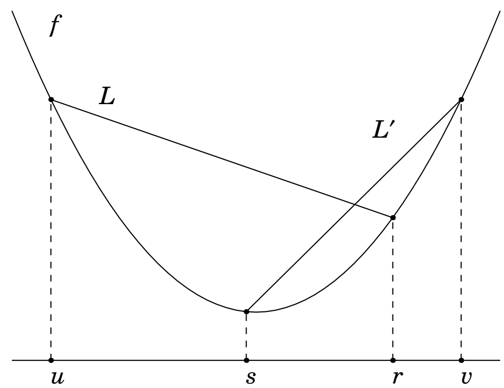



Figura 1:

La interpretación heurística de esta definición es que si "le echamos agua por arriba de la grafica de $f$ en $[a, b]$ no se le cae". En la literatura existen muy buenas referencias sobre este tema como pueden ser [1] o [2].

Usando (1) y (2) es fácil demostrar que si $a < r$, $s < v$, entonces

$$\frac{f(r) - f(u)}{r - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(s)}{v - s} \tag{3}$$

donde puede ocurrir que $r > s$ (ver Figura 1).

Nótese que los extremos de la desigualdad (3) significan que la pendiente de la recta $L$ es menor que la pendiente de la recta $L'$, lo cual es intuitivamente claro, por la convexidad de $f$.

# Toda función convexa es continua

Antes de demostrar que toda función convexa es continua, es conveniente recordar que una función $f$ es continua en $x$ si:

a) existe $\lim_{v \to x} f(v)$, y

b) $\lim_{v \to x} f(v) = f(x)$.

Además ya que $\lim_{v \to x} f(v)$ existe si y sólo si existen los límites laterales y son iguales, es decir $\lim_{v \downarrow x} f(v) = \lim_{v \uparrow x} f(v)$. De esta manera una función $f$ es continua en $x$ si:

a) existen $\lim_{v \downarrow x} f(v)$ y $\lim_{v \uparrow x} f(v)$,

b) y son iguales a $f(x)$.

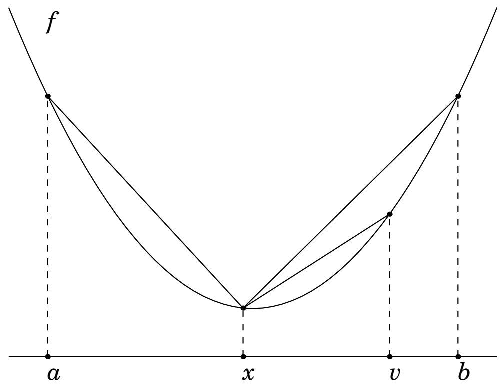



Figura 2:

**Teorema 1** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces $f$ es continua.*

**Demostración.** Sea $x \in (a,b)$ y $a < x < v < b$. Entonces usando (1) y (3) resulta (ver figura 2)

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(v)-f(x)}{v-x} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Las desigualdades anteriores las podemos expresar como:

$$f(x) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(v-x) \leq f(v) \leq f(x) + \frac{f(b)-f(x)}{b-x}(v-x).$$

Por lo tanto $\lim_{v \downarrow x} f(v) = f(x)$. De manera análoga resulta (ahora usando (2) y (3)) que $\lim_{v \uparrow x} f(v) = f(x)$ . Así la continuidad de $f$ en $x$.

# Bibliografía


[1] R. Bartle, D. R. Sherbert, Introducción al análisis matemático de una variable, Limusa, 1996

[2] M. Spivak, Cálculo Infinitesimal, Ediciones Repla, S.A., 1988.


1 de Abril de 1998