

Modelación matemática del control de plagas en un cultivo de brócoli

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán*

Roberto Alejandro Kú Carrillo**

Luz Vianey Vela Arévalo***

Departamento de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma de Aguascalientes

24 de Mayo, 2006

Resumen

En este trabajo se presenta la construcción de tres modelos matemáticos en ecuaciones diferenciales de la dinámica de la plaga Dorso de Diamante (Diamond Back Moth) en una parcela de brócoli al ser controlada por la aplicación de insecticidas y por el efecto de liberaciones de *Diadegma* y *Trichogramma*. En el primer modelo, el efecto del insecticida biológico se modela mediante una función de impulsos repetidos infinitos. En el segundo modelo, el efecto del insecticida biológico se modela mediante una función periódica proporcional a la población. En ambos modelos, se determina su solución analítica y se dan condiciones de convergencia a soluciones periódicas. El tercer modelo incluye impulsos infinitos y umbrales como criterio de aplicación de insecticidas, y se estudió numéricamente. Este último modelo refleja la dinámica de los datos experimentales.

Palabras clave: modelo, DBM, control de plagas, control discontinuo, impulsos.

1. Introducción

Los modelos matemáticos y en particular, los modelos aplicados a la biología pueden ser una herramienta importante para entender la dinámica de un fenómeno. De hecho, las biomatemáticas

*sdelgad@correo.uaa.mx
**raku@correo.uaa.mx
***lvela@correo.uaa.mx

cada vez juegan un papel más importante en el estudio de la biología, que se ve reflejado en el creciente número de publicaciones sobre el tema (Ver Por ejemplo [1, 4, 5]).

Las plagas son perjudiciales para los cultivos industrializados. Existen dos procedimientos típicos para el control de plagas. El primero es el control químico que usa insecticidas que son altamente efectivos aunque existe el riesgo de contaminar el producto con sustancias perjudiciales para la salud. El control biológico consiste en el uso de insectos benéficos para los cultivos, depredadores naturales o parasitoides. Otro tipo de control biológico son los insecticidas biológicos como el *Bacillus Thuriengiensis*, que es una toxina que provoca la muerte de la plaga cuando es ingerido por ésta; estos no son dañinos para el ser humano cuando son usados adecuadamente. El producto que se obtiene usando control biológico es más valorado en el mercado.

El control adecuado de plagas es importante porque de ellos depende la calidad del producto y su valor en el mercado. Por lo anterior, nuestro objetivo es proponer y estudiar distintos modelos matemáticos con el fin de abstraer las características más importantes de la dinámica de la plaga y de los mecanismos de control más comúnmente usados. Esto nos permitirá tener una herramienta económica para proponer o validar estrategias de control de la plaga.

En una parcela se cultiva brócoli, cuyo ciclo de vida dura aproximadamente 90 días y varía según las condiciones de temperatura. Este cultivo es atacado por distintas plagas, siendo la más agresiva el gusano dorso de diamante (DMB) *Plutella Xylostella*, cuyo ciclo de vida se compone 4 etapas, huevo, larva, pupa y palomilla, que duran aproximadamente de 55 a 90 días dependiendo de las condiciones de temperatura. Para su control se usa el insecticida biológico *Bacillus Thuriengiensis* con marcas comerciales Javelin y Xentari. Este insecticida actúa por un periodo de 4 días y su efectividad está en función de la edad de la larva, siendo más efectivo cuando la larva es más joven. Otro control biológico son los insectos parasitoides, como la *Diadegma* y el *Trichogramma*. Ambos son avispas que parasitan a la larva y huevesillos del dorso de diamante, respectivamente. La diadegma es liberada aproximadamente 5 veces a la semana en cantidades que fluctúa de 1 a 5 frascos, con 50 machos y 50 hembras. Su ciclo de vida es 2 a 3 semanas dependiendo de las condiciones de temperatura. El periodo de incubación de los huevesillos es de 7 días, para ambos insectos. La liberación de trichogramma se hace semanalmente en múltiplos de 5 mil huevesillos (1 plg²). En la figura 1 se muestran algunos insectos benéficos.

Nos situamos en una empresa que se dedica al cultivo y procesamiento de hortalizas, entre las cuales tenemos el brócoli, zanahoria, coliflor, etc. En particular, estudiamos el cultivo del brócoli que es atacado por plagas tales como: gusano dorso de diamante (*Plutella Xylostella*), gusano soldado (*Spodoptera exigua*), gusano falso medidor (*Trichoplusia ni*), gusano pieris (*Artogeia rapae*), pulgón gris (*Brevioryne brassicae*), chinche Arlequín (*Murgantia histrionica*), minador (*Liriomyza sp*), mosquita blanca (*Trialeurodes sp* y *hemisia tabaci*), trips (*Frankliniella occidentalis*), chicharrita (*Empoasca sp*), araña roja (*Tetranychus spp*).

La plaga más agresiva y problemática de las anteriores es el gusano dorso de diamante (DBM= Diamond Back Moth) por lo cual será nuestro objetivo estudiar su dinámica en las condiciones de cultivo y manejo de plagas que son usadas en la empresa. Los gusanos son perjudiciales porque se alimentan de la planta afectando su crecimiento. Sin embargo, otro problema importante consiste

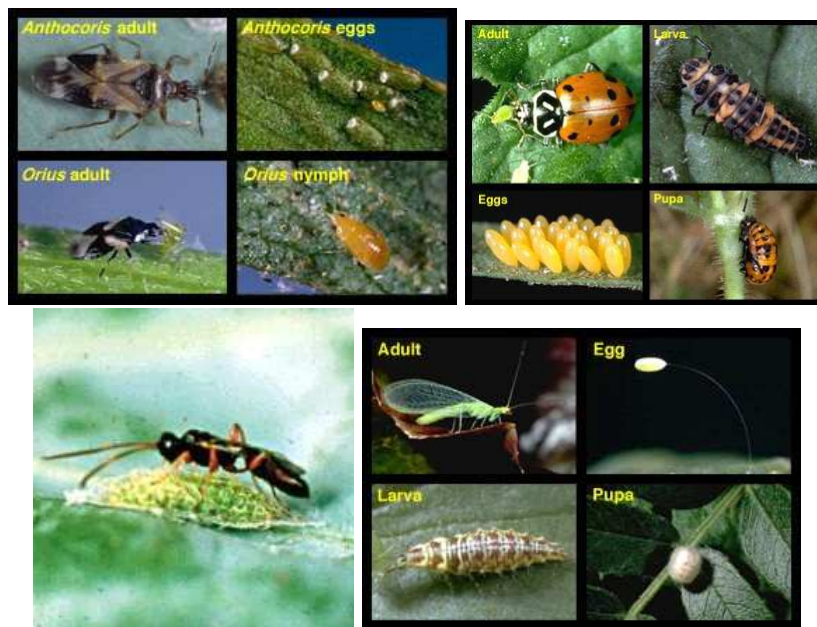


Figura 1: Insectos benéficos: chinche pirata, catarina, chrisopa, diadegma (en el sentido de las manecillas del reloj.)

en que los gusanos aparecen en el brócoli cuando este es cosechado y procesado. Esto a su vez, causa que el precio de la cosecha sea penalizado por la cantidad de plaga que contiene. En casos extremos el producto no es comprado por las procesadoras ya que existe un máximo permitido de plaga en una cosecha.

Existen dos procedimientos típicos de control de plagas:

- Control químico (insecticidas). Los insecticidas químicos tienen la ventaja que son altamente efectivos en el control de la plaga pero a costa de una contaminación de producto con sustancias que pueden ser perjudiciales para la salud humana. De hecho, la empresa que nos proporciono la información no usa este tipo de producto, es decir, ofrece productos que en cierto grado están libre de agentes contaminantes y/o perjudiciales para la salud.
- Control biológico (insectos y "insecticidas biológicos"). Este consiste en el uso de insectos benéficos para los cultivos, depredadores naturales o parasitoides. Los depredadores se comen los huevos o la plaga que ataca al cultivo. Los parasitoides son insectos que usan a la plaga como huésped para depositar sus huevecillos para que se alimenten de la plaga. Estos insectos se encuentran naturalmente en el ambiente, sin embargo, el uso de este tipo de insectos consiste en una liberación programada de los mismos con el fin de aumentar la cantidad presente en el medio. También existen insecticidas biológicos como el *Bacillus Thuriengensis* que es una toxina que provoca la muerte de plaga cuando es ingerida por estos. El uso de este producto no es dañino para el ser humano cuando es usado adecuadamente.

2. Planteamiento de problema

2.1. El ciclo de vida del brócoli

Las plantas de brócoli son cultivadas en un invernadero y posteriormente son transplantadas en la parcela o tabla al aire libre cuando aún son pequeñas. El tiempo de maduración del brócoli es afectado principalmente por la temperatura. Una tabla puede alcanzar su maduración aproximadamente en 90 días en verano y retrasarse en invierno. La tabla antes de ser usada es rociada con un herbicida (GOAL) para eliminar plantas parásitas no deseadas. Una vez que el cultivo ha alcanzado su maduración es cosechado y llevado a la planta procesadora donde es congelado para su venta. Durante este ciclo el brócoli es atacado por diversas plagas, como las mencionadas anteriormente.

2.2. El ciclo de vida de DBM

El gusano Dorso de Diamante es la plaga más agresiva que ataca al brócoli. Se pueden distinguir distintas etapas en su ciclo de vida. Ver figura 2.

Huevo. Son pequeños y redondos, de color blanco amarillento que son depositados individualmente o en grupo de 2 o 3 en las hojas de las plantas del cultivo. Las larvas aparecen entre los 5 a 10 días posteriores a la deposición de los huevos.

Larva. Atraviesan 4 etapas que se caracterizan por el las primeras los gusanos se alimentan del tejido interior de las plantas y posteriormente en las superficies de las plantas. Las larvas miden en promedio 8mm. Este ciclo dura de 10 días a 4 semanas dependiendo de la temperatura.

Pupa. La larva desarrolla un capullo que se encuentra adherido a las hojas y tallos de la planta. Este ciclo dura aproximadamente de 7 a 15 días.

Palomilla. Miden aproximadamente 8mm y son de un color café grisáceo En el adulto sus alas forman una línea de tres manchas amarillas en forma de diamante.

El ciclo total de este insecto dura de 55 a 90 días dependiendo de las condiciones de temperatura.

2.3. Uso de del *Bacillus Thuringiensis*

En esta empresa en el control de plagas se usan un insecticida biológico llamado *Bacillus thuringiensis*, con marcas comerciales Xentari (variedad aizawai) y Javelin (variedad kurstaki) este tipo de insecticida es una contiene toxinas que son dañinas para los gusanos. Para que sea efectivo los gusanos deben ingerirlas y les provoca vomitos, diarrea y hemorragias intestinales. Según información proporcionada por la empresa este tipo de insecticida actúa por un periodo de 4 días y su efectividad esta en proporción a la edad de gusano, pues mientras mas grande sea, mayor cantidad de insecticida tendrá que comer. Se usan 0.5kg por hectárea. Además influyen factores ambientales tales como la precipitación, viento, etc. Que puede modificar la cantidad de insecticida en adherido a las hojas. La empresa usa el criterio de 0.3 gusanos por planta para aplicar dicho insecticida. La aplicación puede darse el mismo día o dentro de los 2 días posteriores.

2.4. Uso de la *Diadegma* y *Trichogramma*

Otro control que se usa, son los insectos depredadores y parasitoides de los gusanos. Los de mayor importancia son la *Diadegma*, que es una avispa que deposita su huevecillos en la larva de DBM justo antes de que el gusano se transforme en capullo. Dentro del capullo las crías de *Diadegma* matan al gusano y se alimentan del el. La pupa entonces presenta un pequeño punto negro. Estas avispas miden de 6mm a 1cm de longitud y son enemigos naturales. Su población depende fuertemente en la cantidad de huéspedes disponibles y pueden llegar a parasitar hasta el 90 % de las larvas. El periodo total de desarrollo de la *Diadegma* es de 2 a 3 semanas dependiendo de las condiciones de temperatura. Generalmente, el periodo de incubación de sus huevecillos es de 7 días. La empresa lo libera en frasco donde cada uno de ellos contiene 50 macho y 50 hembras. Las liberaciones por tabla muy frecuentes, aproximadamente 5 días a la semana hay liberaciones en cantidades que fluctúan de 1 a 3 frascos [3].



Figura 2: Dorso de diamante en sus diferentes etapas de vida: huevo, pupa no parasitada, pupa parasitada, gusano, adulto (en el sentido de las manecillas del reloj.)

Otro insecto benéfico que es ampliamente usado en esta empresa el *Trichogramma*. Este insecto es una avispa que parasita a los huevos de DBM. Una vez depositado el huevo el *Trichogramma* deposita sus huevecillos en el huevo de DBM que se alimenta del huevo y en un periodo aproximado de 7 días surge el adulto de *Trichogramma*. Las liberaciones de este insecto se dan en hojas de una pulgada cuadrada en donde se encuentran los huevecillos de *Trichogramma* con 5,000 huevecillos.

Existen otros insectos que son liberados para el control de la plagas, pero que no son estudiados en el presente trabajo.

3. Materiales y Métodos

Una empresa agrícola de la entidad nos proporcionó una serie de datos correspondiente al control de plagas en el cultivo de brócoli del periodo junio a septiembre de 2005.

El modelo básico [2] de la dinámica de la densidad de población de plaga sin ningún control es $\dot{x} = \alpha x + \beta$ cuya solución es $x(t) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)}(\alpha x_0 + \beta) - \beta)$, donde $x(t)$ es la densidad de población, α la tasa de crecimiento exponencial, β la tasa de migración y x_0 es la densidad de población en el tiempo t_0 . Estos parámetros pueden calcularse usando los datos experimentales del día cero hasta un día antes de la aplicación del Javelin o Xentari, resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones. Se encontró que α tiene el valor de 0.16, y β de 0.006.

Los modelos que incluyen control de plagas se describen a continuación. El control por insecticida se modeló de dos formas: la primera consiste en que el insecticida tiene un efecto inmediato en cada aplicación; la segunda consiste en considerar una efectividad finita del insecticida.

4. Modelo con impulsos infinitos en cada aplicación de insecticida.

Se estudia la población de una plaga en un cultivo de brócoli. La plaga es el dorso de diamante, que se controla de dos formas: con la diadegma como agente biológico que infecta los huevos, y con la aplicación de insecticidas (Xentari o Javelín).

4.1. Una aplicación del insecticida

Se supone que la población de dorso de diamante $x(t)$ tiene crecimiento natural exponencial con una tasa α ; que existe migración del exterior a una tasa β constante, y que en determinado tiempo $t = T$ hay una aplicación de insecticida, el cual tiene una efectividad proporcional al tamaño de la población en el momento de la aplicación.

El modelo es

$$\dot{x} = \alpha x + \beta - \gamma x \delta(t - T), \quad (1)$$

donde $\delta(t)$ es la función impulso infinito en $t = 0$, y γ es la efectividad de la aplicación de insecticida.

Se puede resolver con transformada de Laplace [2]. Notar que

$$\begin{aligned} L[\delta(t-T)](s) &= \int_0^{\infty} \delta(t-T)e^{-st} dt = e^{-Ts}, \quad y \\ L[f(t)\delta(t-T)](s) &= \int_0^{\infty} f(t)\delta(t-T)e^{-st} dt = e^{-Ts}f(T). \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicamos la transformada a ambos lados de la ecuación y usando la fórmula en (2), obtenemos

$$\begin{aligned} sL[x(t)](s) - x_0 &= \alpha L[x(t)](s) + \frac{\beta}{s} - \gamma L[x(t)\delta(t-T)] \\ &= \alpha L[x(t)](s) + \frac{\beta}{s} - \gamma e^{-Ts}x(T), \end{aligned}$$

donde se usó la fórmula de la transformada de Laplace de la derivada de una función y $x_0 = x(0)$ es la condición inicial.

Simplificando obtenemos que

$$\begin{aligned} L[x(t)](s) &= \frac{x_0}{s-\alpha} + \frac{\beta}{s(s-\alpha)} - \gamma \frac{e^{-Ts}x(T)}{s-\alpha} \\ &= \frac{x_0}{s-\alpha} - \frac{\beta}{\alpha s} + \frac{\beta}{\alpha(s-\alpha)} - \gamma \frac{e^{-Ts}x(T)}{s-\alpha} \end{aligned}$$

Tomando la transformada de Laplace inversa, obtenemos la solución

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) - \gamma x(T) e^{\alpha(t-T)} \text{Escalón}(t-T), \quad (3)$$

donde la función Escalón se define como

$$\text{Escalón}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Notar que $x(T)$ aún tiene que determinarse. Evaluando la expresión (3) en $t = T$, obtenemos la ecuación

$$x(T) = x_0 e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha T} - 1) - \gamma x(T),$$

la cual puede resolverse para $x(T)$,

$$x(T) = \frac{1}{1+\gamma} \left(x_0 e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha T} - 1) \right).$$

Con esto, la solución de (1) es,

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) - \frac{\gamma}{1+\gamma} \left(x_0 e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha T} - 1) \right) e^{\alpha(t-T)} \text{Escalón}(t-T). \quad (4)$$

Esta solución se muestra en la figura 3.

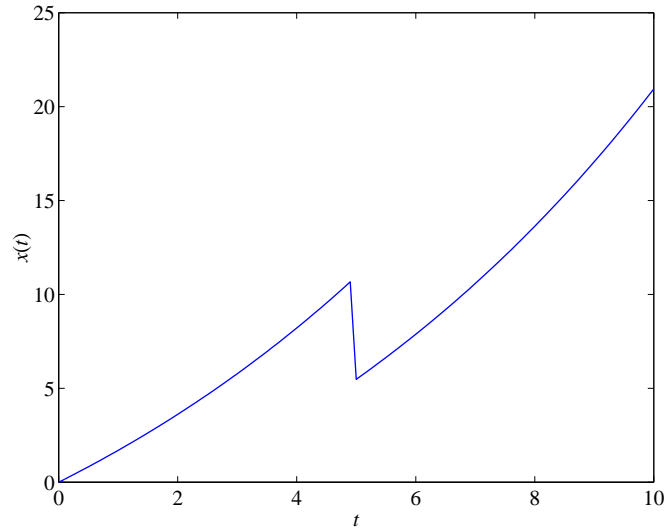


Figura 3: Una aplicación de insecticida con efecto instantáneo (Ver ecuación (1))

4.2. Impulsos repetidos

Si existen impulsos infinitos en los tiempos T_1, T_2, T_3, \dots , con coeficiente de eficiencia γ , el modelo análogo a (1) es

$$\dot{x} = \alpha x + \beta - \sum_{i=1}^{\infty} \gamma x \delta(t - T_i). \quad (5)$$

La solución puede obtenerse de manera totalmente análoga al caso anterior (3),

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) - \sum_{i=1}^{\infty} \gamma x(T_i) e^{\alpha(t-T_i)} \text{Escalón}(t - T_i), \quad (6)$$

donde los valores $x(T_i)$ pueden resolverse como

$$\begin{aligned} x(T_1) &= \frac{1}{1+\gamma} \left(x_0 e^{\alpha T_1} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T_1} - 1) \right), \\ x(T_2) &= \frac{1}{1+\gamma} \left(x_0 e^{\alpha T_2} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T_2} - 1) - \gamma x(T_1) e^{\alpha(T_2-T_1)} \right), \\ x(T_3) &= \frac{1}{1+\gamma} \left(x_0 e^{\alpha T_3} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T_3} - 1) - \gamma x(T_1) e^{\alpha(T_3-T_1)} - \gamma x(T_2) e^{\alpha(T_3-T_2)} \right), \\ &\vdots \\ x(T_n) &= \frac{1}{1+\gamma} \left(x_0 e^{\alpha T_n} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T_n} - 1) - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma x(T_i) e^{\alpha(T_n-T_i)} \right). \end{aligned}$$

Para el caso $\beta = 0$, sustituyendo iterativamente, obtenemos finalmente la expresión,

$$x(T_n) = \frac{x_0 e^{\alpha T_n}}{(1+\gamma)^n}.$$

Si consideramos que los intervalos entre aplicaciones son regulares, podemos tomar $T_n = nT$, y la expresión anterior es

$$x(nT) = \frac{x_0 e^{\alpha nT}}{(1+\gamma)^n}.$$

Esta sucesión representa los valores de la solución en los puntos de aplicación de insecticida $t = n$, la cual converge a 0 si $e^{\alpha T}/(1+\gamma) < 1$, converge a la condición inicial si $e^{\alpha T}/(1+\gamma) = 1$, y diverge en otro caso.

Por otro lado, en el caso $\beta > 0$ (hay migración positiva hacia el cultivo) la expresión para $x(T_n)$ puede obtenerse de la misma forma aunque los cálculos son un poco engorrosos:

$$x(T_n) = \frac{1}{(1+\gamma)^n} \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\alpha T_n} + \frac{\beta}{\alpha} \left(-\frac{1}{1+\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{i+1}} e^{\alpha(T_n-T_{n-i})} \right).$$

Si suponemos que las aplicaciones suceden en intervalos regulares $T_n = nT$, entonces la expresión anterior se simplifica

$$x(nT) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{e^{\alpha T}}{1+\gamma} \right)^n + \frac{\beta}{\alpha} \left(-\frac{1}{1+\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma}{1+\gamma} \left(\frac{e^{\alpha T}}{1+\gamma} \right)^i \right).$$

Esta sucesión converge cuando $e^{\alpha T}/(1+\gamma) < 1$, y diverge si $e^{\alpha T}/(1+\gamma) \geq 1$. En el primer caso, el límite está dado por:

$$x(nT) \rightarrow \frac{\beta}{\alpha} \left(-1 + \frac{\gamma}{1+\gamma - e^{\alpha T}} \right).$$

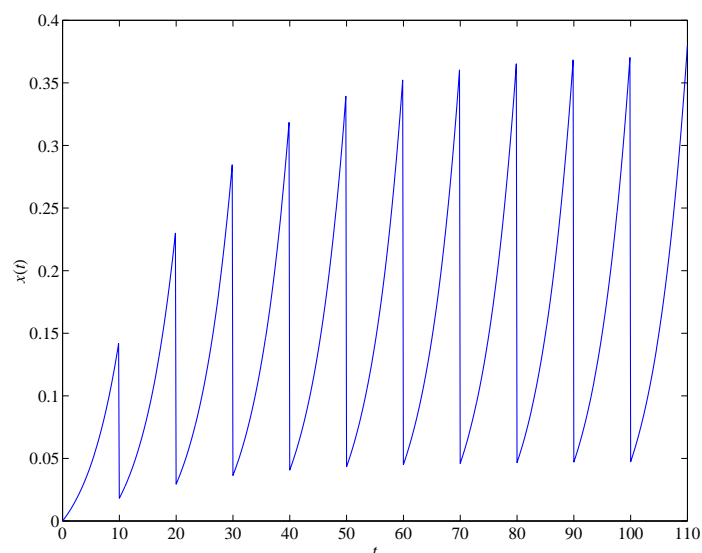


Figura 4: Una solución del modelo con aplicaciones repetidas de insecticida con efecto instantáneo (Ver ecuación 5)).

Notar que este límite no depende de la condición inicial x_0 .

Estos son los valores que la población de plaga adquiere como consecuencia de la aplicación de insecticida. Es decir, los puntos en la sucesión antes mencionada corresponden a el resultado instantáneo de la aplicación de insecticida, son los puntos a los que la población ha sido reducida con cada aplicación en un tiempo $t = nT$. Una solución del modelo se muestra en la figura 4.

5. Tiempo de acción del insecticida limitado con aplicaciones periódicas

Si la aplicación del insecticida es en intervalos periódicos de tiempo con periodo T , y la acción del insecticida tiene una duración τ (con $\tau < T$), el modelo de crecimiento y control de la plaga está dado por:

$$\dot{x} = \alpha x + \beta - f(t)x, \quad (7)$$

donde α es la tasa de crecimiento exponencial de la plaga, β es la rapidez de migración natural de plaga hacia el cultivo, y $f(t)$ es una función periódica que denota la aplicación y acción limitada del insecticida. En nuestro caso, $f(t)$ es un tren de ondas cuadradas con amplitud γ :

$$f(t) = \begin{cases} \gamma, & nT \leq t \leq nT + \tau, \\ 0, & nT + \tau < t < (n+1)T, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Una simplificación sin consecuencias se obtiene al tomar $\tau = T/2$, que es el que se estudiará a continuación.

La ecuación anterior se puede escribir también como $\dot{x} + (f(t) - \alpha)x = \beta$, que es una ecuación lineal de primer orden no homogénea. Su solución se puede obtener como

$$x(t) = \begin{cases} A_n e^{t(\alpha-\gamma) + nT\gamma/2} - \beta/(\alpha - \gamma), & nT \leq t \leq nT + T/2, \\ B_n e^{t\alpha - (n+1)T\gamma/2} - \beta/\alpha, & nT + T/2 \leq t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ representa el múltiplo del periodo para el intervalo de t en cuestión.

Las constantes $A_n, B_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$, deben escogerse de forma que la solución sea continua, lo cual se describe enseguida. Si la población inicial de la plaga es x_0 , A_0 se escoge de tal forma que $x(0) = x_0$; resolviendo se obtiene que

$$A_0 = x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma},$$

luego

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma}\right) e^{t(\alpha-\gamma)} - \frac{\beta}{\alpha - \gamma}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T/2.$$

Ahora, tenemos que

$$x(t) = B_0 e^{t\alpha - T\gamma/2} - \beta/\alpha, \quad \text{para } T/2 \leq t \leq T,$$

entonces B_0 debe obtenerse de tal forma que la solución $x(t)$ sea continua en $t = T/2$. Resolviendo obtenemos que

$$B_0 = x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha - \gamma}\right) e^{-T(\alpha-\gamma)/2},$$

y así,

$$x(t) = \left[x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} - \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha - \gamma)} e^{-T(\alpha-\gamma)/2} \right] e^{t\alpha - T\gamma/2} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{para } T/2 \leq t \leq T.$$

Este proceso puede continuarse iterativamente, hasta obtener la solución dada por

$$x(t) = \begin{cases} \left[x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha - \gamma)}(1 - e^{T\alpha/2}) \left\{ e^{-T(2\alpha-\gamma)/2} + e^{-2T(2\alpha-\gamma)/2} \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-3T(2\alpha-\gamma)/2} + \dots + e^{-nT(2\alpha-\gamma)/2} \right\} \right] e^{t(\alpha-\gamma)+nT\gamma/2} \\ - \frac{\beta}{\alpha - \gamma}, \quad \text{para } nT \leq t \leq nT + T/2. \\ \left[x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha - \gamma)} \left((1 - e^{T\alpha/2}) \left\{ e^{-T(2\alpha-\gamma)/2} + e^{-2T(2\alpha-\gamma)/2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-3T(2\alpha-\gamma)/2} + \dots + e^{-nT(2\alpha-\gamma)/2} \right\} \right. \\ \left. \left. - e^{T\alpha/2} e^{-(n+1)T(2\alpha-\gamma)/2} \right) \right] e^{t\alpha-(n+1)T\gamma/2} - \frac{\beta}{\alpha}, \\ \text{para } nT + T/2 \leq t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

Las sumas finitas de hecho pueden simplificarse para obtener la expresión siguiente:

$$x(t) = \begin{cases} \left[x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha - \gamma)}(1 - e^{T\alpha/2}) \left\{ \frac{e^{-T(2\alpha-\gamma)/2}(e^{-nT(2\alpha-\gamma)/2} - 1)}{e^{-T(2\alpha-\gamma)/2} - 1} \right\} \right] \\ e^{t(\alpha-\gamma)+nT\gamma/2} - \frac{\beta}{\alpha - \gamma}, \quad \text{para } nT \leq t \leq nT + T/2. \\ \left[x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha - \gamma)} \left((1 - e^{T\alpha/2}) \left\{ \frac{e^{-T(2\alpha-\gamma)/2}(e^{-nT(2\alpha-\gamma)/2} - 1)}{e^{-T(2\alpha-\gamma)/2} - 1} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - e^{T\alpha/2} e^{-(n+1)T(2\alpha-\gamma)/2} \right) \right] \\ e^{t\alpha-(n+1)T\gamma/2} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{para } nT + T/2 \leq t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

Esta solución está representada en la figura 5.

Los cambios drásticos en la evolución de la población de plaga se obtienen al aplicar el insecticida y al término del efecto del insecticida en cada periodo; en nuestro caso, estos eventos ocurren en $t = nT$ y $t = nT + T/2$. Al evaluar, obtenemos lo siguiente:

$$x(nT) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} \right) e^{nT(2\alpha-\gamma)/2} \\ + \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha - \gamma)} (1 - e^{T\alpha/2}) \frac{e^{nT(2\alpha-\gamma)/2} - 1}{e^{T(2\alpha-\gamma)/2} - 1} - \frac{\beta}{\alpha - \gamma},$$

y

$$x(nT + T/2) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma} \right) e^{nT(2\alpha-\gamma)/2+T(\alpha-\gamma)/2} \\ + \frac{\beta\gamma e^{T(\alpha-\gamma)/2}}{\alpha(\alpha - \gamma)} (1 - e^{T\alpha/2}) \frac{e^{nT(2\alpha-\gamma)/2} - 1}{e^{T(2\alpha-\gamma)/2} - 1} - \frac{\beta}{\alpha - \gamma}.$$

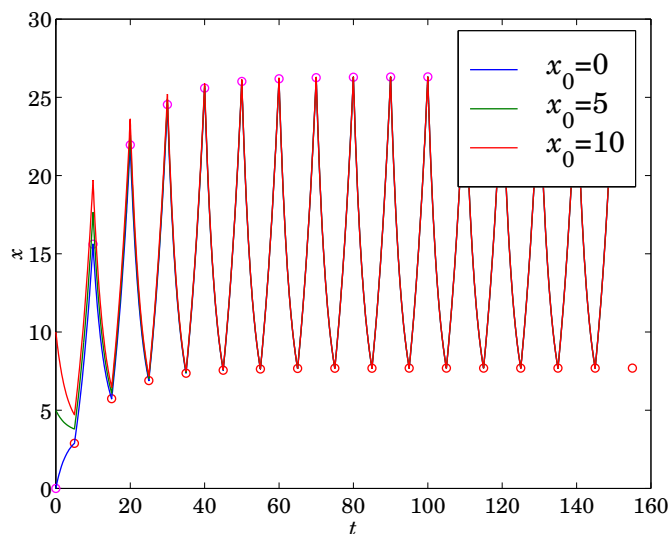


Figura 5: Soluciones para el modelo con efecto del insecticida como una onda cuadrada con duración $T/2$ y periodo T (Ver ecuación 7).

Nótese que si $\gamma > 2\alpha$, la solución se estabiliza en una órbita periódica, puesto que las exponenciales decaen a cero al aumentar n . Independientemente de la condición inicial x_0 , las soluciones tienden a una órbita periódica con máximos y mínimos constantes. Si $\gamma \leq 2\alpha$, las soluciones eventualmente explotan. Si $\gamma \leq \alpha$, entonces la aplicación de insecticida es ineficiente para controlar la población de plaga.

5.1. Efecto del insecticida con duración arbitraria

La solución anterior se obtuvo para el caso en el que la efectividad del insecticida τ tiene exactamente una duración de la mitad entre sucesivas aplicaciones del mismo; es decir, si T es el tiempo entre aplicaciones, entonces $\tau = T/2$. Ahora trataremos el caso general en el que $0 < \tau < T$, con una ligera variante: se asumirá que al inicio del proceso ($t = 0$) la población inicial x_0 evoluciona sin la presencia del insecticida, el cual se aplica en el tiempo $t = T - \tau$ y tiene efecto hasta el tiempo $t = T$.

El modelo es

$$\dot{x} + (f(t) - \alpha)x = \beta, \quad (8)$$

donde f es la función que denota el efecto del insecticida:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & nT \leq t \leq (n+1)T - \tau, \\ \gamma, & (n+1)T - \tau < t < (n+1)T, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

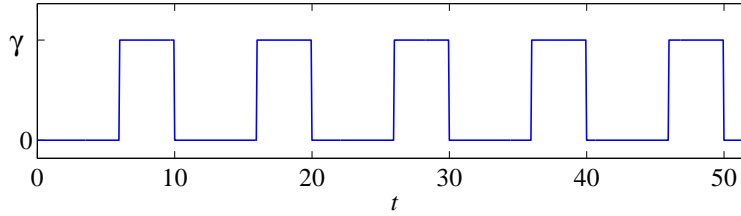


Figura 6: Tren de ondas cuadradas con periodo $T = 10$ y duración $\tau = 4$.

Ver figura 6.

La solución se puede obtener análogamente al caso $\tau = T/2$, y en esa línea se obtiene lo siguiente:

$$x(t) = \begin{cases} \left[x_0 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha-\gamma)} e^{-T\alpha} (e^{\tau\alpha} - e^{\tau\gamma}) \left\{ \frac{e^{-n(T\alpha-\tau\gamma)} - 1}{e^{-(T\alpha-\tau\gamma)} - 1} \right\} \right] \\ \quad e^{t\alpha-n\tau\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{para } nT \leq t \leq (n+1)T - \tau. \\ \left[x_0 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha-\gamma)} \left(e^{-T\alpha} (e^{\tau\alpha} - e^{\tau\gamma}) \left\{ \frac{e^{-n(T\alpha-\tau\gamma)} - 1}{e^{-(T\alpha-\tau\gamma)} - 1} \right\} \right. \right. \\ \quad \left. \left. + e^{-((n+1)T\alpha-\tau\alpha-n\tau\gamma)} \right) \right] e^{t(\alpha-\gamma)+(n+1)(T-\tau)\gamma} - \frac{\beta}{\alpha-\gamma}, \\ \quad \text{para } (n+1)T - \tau \leq t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

Esta solución está representada en la figura 7.

La solución se estabiliza en una solución periódica si $T\alpha - \tau\gamma < 0$, o sea si $\gamma > (T/\tau)\alpha$, de otra forma la solución explota a infinito, con β positivo. Evaluando en los puntos donde se aplica el insecticida ($t = nT - \tau$) y en los que el insecticida deja de tener efecto, ($t = nT$) se puede obtener los puntos máximos y mínimos a donde la solución converge (en el caso $\gamma > (T/\tau)\alpha$):

$$x(nT) = -\frac{\beta}{\alpha} + \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{n(T\alpha-\tau\gamma)} + \frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha-\gamma)} (e^{\tau(\alpha-\gamma)} - 1) \frac{1 - e^{n(T\alpha-\tau\gamma)}}{1 - e^{T\alpha-\tau\gamma}},$$

$$x(nT - \tau) = -\frac{\beta}{\alpha} + e^{(T-\tau)\alpha} \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{n(T\alpha-\tau\gamma)} + \frac{\beta\gamma e^{(T-\tau)\alpha}}{\alpha(\alpha-\gamma)} (e^{\tau(\alpha-\gamma)} - 1) \frac{1 - e^{n(T\alpha-\tau\gamma)}}{1 - e^{T\alpha-\tau\gamma}},$$

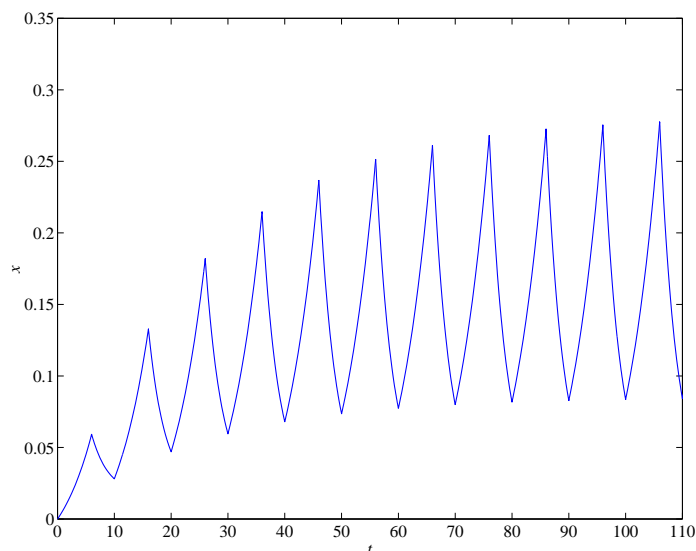


Figura 7: Una solución para el modelo de evolución de plaga con aplicaciones repetidas de insecticida con efecto finito (Ver ecuación (8)).

6. Control biológico por insecticida y liberaciones de *Trichogramma* y *Diadegma*.

En la práctica, las liberaciones de *Diadegma* se realizan con mucha frecuencia, por lo que se asume que su efecto se absorbe en la tasa de crecimiento α . En cambio, el *Trichogramma* se libera semanalmente, con un retraso en su efecto de una semana, por lo que se considera que su efecto coincide con un impulso infinito del tipo de la Ecuación (1). Asimismo, la aplicación de insecticida no se realiza en intervalos regulares, sino que se toma un criterio de umbrales; es decir, el insecticida se aplica cuando la densidad de población de plaga alcanza un nivel determinado. Este modelo se estudió numéricamente, con un valor del umbral de 0.4. Los resultados se muestran en la figura 8, con línea punteada. Con este modelo se obtuvieron resultados acordes con los datos experimentales.

7. Conclusiones

Se propusieron y estudiaron tres clases de modelos para la evolución de especies sujeta a controles biológicos. Los dos primeros modelos analizados proporcionan criterios analíticos de convergencia de controles discontinuos y con impulsos infinitos. Este resultado es de interés teóri-

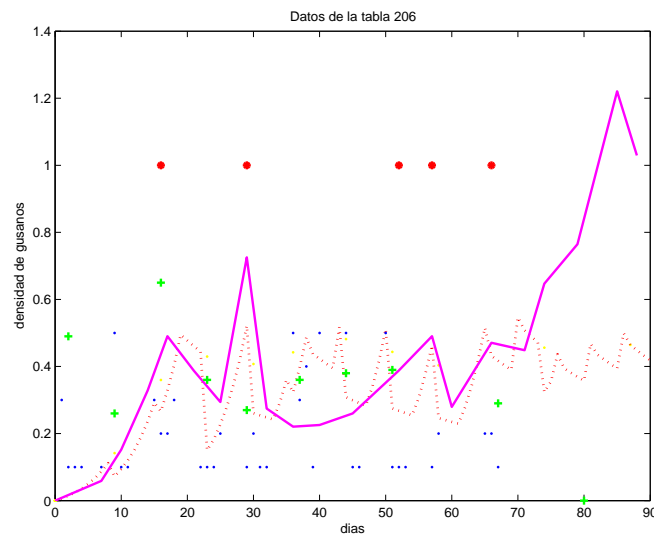


Figura 8: Comparación de la solución del modelo con los datos experimentales.

co, puesto que en la práctica el cultivo se cosechará en un tiempo determinado, y no se requiere convergencia de soluciones en tiempo infinito, sin embargo, proporciona criterios para el control de la plaga dependiendo de la efectividad del control. El tercer modelo incluye la combinación de impulsos infinitos con el criterio de umbrales para aplicación de insecticida. Este modelo, por su complejidad, se estudió numéricamente, quedando como plan futuro su estudio analítico. Una parte importante del estudio de plagas consiste en la estimación de los parámetros que se incluirán en el modelo, por lo que la recolección de suficientes datos experimentales es requisito indispensable. El presente trabajo tomó en cuenta algunos datos experimentales para validar los modelos, sin embargo, estos datos incluyen la aplicación de muy diversos controles biológicos. Por lo cual resulta complicado aislar el efecto de cada uno de los controles, y se requiere más experimentación para obtener un resultado más exacto.

Referencias

- [1] BARCLAY HJ, Models for Pest Control Using Predator Release, Habitat Management and Pesticide Release in Combination, *J.App.Ecology*. Vol. 19, No. 2, pp. 337-348, 1982.
- [2] BORRELLI R y COLEMAN CS, Ecuaciones diferenciales, Una perspectiva de modelación. México: Oxford, p. 397, 2002.

- [3] http://www.oisat.org/control_methods/natural_enemies/parasitoids/diadegma.html o Philippine German Plant Protection Project, 1996: pp 1-17.
- [4] TANG S et al. Integrated pest management models and their dynamical behaviour, Bull. Math. Biol. Vol. 67, pp. 115-135, 2005.
- [5] ZHAO JZ et al. Development and Characterization of Diamondback Moth Resistance to Transgenic Broccoli Expressing High Levels of Cry1C, App. Env. Microb. Vol. 66, No. 9, 2000.